Министерство сельского хозяйства Российской Федерации

ФГБОУ ВО «ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. ИМПЕРАТОРА ПЕТРА I»

В.Д. Попело
М.В. Ванеева

Теория математической обработки геодезических измерений

Часть 2
Оценивание результатов геодезических измерений и их погрешностей на основе вероятностных представлений

Учебное пособие

Воронеж
2015

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Воронежского государственного агроуниверситета

УДК 528(075)
ББК 26.1я7
П57

Рецензенты:
начальник кафедры технических гидрометеорологических средств и средств воздушной разведки ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), доктор технических наук, доцент И.Н. Ищук;

профессор кафедры математических методов исследования операций Воронежского государственного университета, доктор географических наук, доцент В.М. Умывакин

Попело В.Д.
П57 Теория математической обработки геодезических измерений. Часть 2. Оценивание результатов геодезических измерений и их погрешностей на основе вероятностных представлений: учебное пособие / В.Д. Попело, М.В. Ванеева. – Воронеж : ВГАУ, 2015. – 138 с.

Учебное пособие разработано с учетом требований государственного образовательного стандарта по дисциплине «Теория математической обработки геодезических измерений» для студентов 2 курса очного и заочного отделения, обучающихся по направлению подготовки 21.03.02 «Землеустройство и кадастры» (уровень бакалавриата). Во второй части пособия приведены базовые сведения о сущности и основных приемах обработки результатов геодезических измерений, опирающихся на идеи вероятностного (статистического) подхода. Рассмотрены процедуры формирования эмпирических законов распределения результатов измерений, сущность и основные особенности обработки прямых и косвенных равноточных и неравноточных измерений величин, процедуры совместной обработки результатов измерений нескольких величин, связанных функциональной зависимостью.

Ил. 16. Табл. 7. Библиогр.: 52 назв.

Оглавление

Предисловие 5
Введение. Сущность вероятностного (статистического) подхода к обработке результатов многократных измерений 6
Глава 1 Эмпирический закон распределения результатов измерений 10
§ 1.1 Представление результатов многократных измерений в виде вариационного ряда 10
§ 1.2 Построение гистограмм 15
§ 1.3 Построение полигонов 19
Контрольные вопросы и задания 21
Список литературы к главе 1... 23
Глава 2 Приближенное оценивание параметров закона распределения генеральной совокупности по выборке конечного объема 24
§ 2.1 Свойства оценок результата измерений................................. 24
§ 2.2 Особенности нормального закона распределения результатов измерений 28
§ 2.3 Правило «трех сигм». Обнаружение аномальных результатов измерений (грубых погрешностей).. 31
§ 2.4 Оптимальные оценки измеряемых величин по результатам многократных измерений. Метод максимального правдоподобия......... 35
§ 2.5 Формирование точечных и интервальных оценок по результатам многократных прямых измерений 41
§ 2.6 Оценка точности результатов измерений в присутствии систематических погрешностей. Суммарная погрешность 51
Контрольные вопросы и задания 54
Список литературы к главе 2... 56
Глава 3 Обработка результатов косвенных измерений.............................. 57
§ 3.1 Погрешность функции одной переменной 57
§ 3.2 Погрешность функции нескольких переменных 60
§ 3.3 Применение методики оценивания погрешности функции нескольких переменных при решении частных задач............................. 64
Контрольные вопросы и задания 76
Список литературы к главе 3... 77

Глава 4 Обработка результатов неравноточных измерений........................ 78
§ 4.1 Особенности неравноточных измерений. Вес результата измерения.. 78
§ 4.2 Погрешность оценок, сформированных по результатам неравноточных измерений... 84
§ 4.3 Объединение результатов прямых измерений 88
§ 4.4 Использование понятия веса в задачах оценки точности результатов косвенных измерений 94
Контрольные вопросы и задания 99
Список литературы к главе 4.. 101
Глава 5 Обработка результатов совместных и совокупных измерений... 102
§ 5.1 Особенности совместной обработки результатов измерений нескольких величин... 102
§ 5.2 Определение параметров линейной функции 105
§ 5.3 Общая схема применения метода наименьших квадратов при обработке совместных измерений 113
§ 5.4 Приведение линейных неравноточных условных уравнений к равноточным. Линеаризация нелинейных условных уравнений 120
Контрольные вопросы и задания 124
Список литературы к главе 5.. 126
Приложение. Проверка гипотезы о совпадении измеренного среднего и известного значения величины. Распределение Стьюдента 127
Список литературы 132

Предисловие

Учебное пособие разработано с учетом требований государственного образовательного стандарта по дисциплине «Теория математической обработки геодезических измерений» и состоит из трех частей:

Часть 1. Математические и метрологические основы обработки геодезических измерений. Оценивание результатов измерений с позиций детерминированного подхода.

Часть 2. Оценивание результатов геодезических измерений и их погрешностей на основе вероятностных представлений.

Часть 3. Методы уравнивания геодезических построений.

Данное издание представляет собой вторую часть этого пособия, в котором приведены базовые сведения о сущности и основных приемах обработки результатов геодезических измерений, опирающихся на идеи вероятностного (статистического) подхода. Рассмотрены процедуры формирования эмпирических законов распределения результатов измерений, сущность и основные особенности обработки прямых и косвенных равноточных и наравноточных измерений величин, процедуры совместной обработки результатов измерений нескольких величин, связанных функциональной зависимостью. Материал учебного пособия разделен на главы, каждая из которых связана с соответствующей темой лекционного курса.

Книга предназначена для студентов, изучающих дисциплину «Теория математической обработки геодезических измерений», а ее содержание апробировано в Воронежском государственном аграрном университете имени Петра I при подготовке бакалавров по направлениям 21.03.02 «Землеустройство и кадастры».

В результате изучения представленного в пособии материала у обучающихся формируются следующие *компетенции*:
- способность к самоорганизации и самообразованию (ОК-7);
- способность осуществлять поиск, хранение, обработку и анализ информации из различных источников и баз данных, представлять ее в требуемом формате с использованием информационных, компьютерных и сетевых технологий (ОПК-1);
- способность использовать знание математических законов для обработки землеустроительной и иной информации (ПК-13).

Введение.
Сущность вероятностного (статистического) подхода к обработке результатов многократных измерений

Рассмотрим существенные особенности вероятностного (статистического) подхода к обработке результатов на примере многократных прямых измерений некоторой физической величины (расстояния, угла или др.). В дальнейшем принципы статистического оценивания результатов будут распространены и на ситуации косвенных, а также совокупных и совместных измерений.

Напомним, что прямым называют измерение, при котором искомое значение физической величины X получают непосредственно, например, с помощью отсчетного устройства измерительного прибора. Результатом измерения величины X является ***оценка*** её размера $\tilde{X}$ в соответствующих единицах:

$$\tilde{X} = \tilde{x}[X],$$

где $\tilde{x}$ – числовое значение величины X, отличное от истинного числового значения x вследствие обязательного присутствия ***погрешности*** в полученном результате, $[X]$ – единица измеряемой величины. Будем далее рассматривать безразмерные оценки числового значения измеряемой величины, имея которые, уже легко получить окончательный результат путем приписывания числовому значению $\tilde{x}$ размерности единицы измеряемой величины. Соответственно и вместо абсолютной погрешности ΔX, выраженной в единицах измеряемой величины, будем рассматривать ее безразмерное числовое значение

$$e = \Delta X / [X].$$

Пусть x_1, x_2, …, x_n – результаты n измерений истинного числового значения x неизвестной величины X; e_1, e_2, …, e_n – неизвестные числовые значения погрешности измерений. Случайный характер погрешностей приводит к тому, что в каждом отдельном измерении погрешность имеет свое собственное значение $e_i \neq e_j$, где $i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., n$; $i \neq j$. Тогда связь между результатами отдельных измерений и соответствующими погрешностями описывается следующей системой уравнений, которую часто называют ***фундаментальной*** системой условных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = x + e_1 \\ x_2 = x + e_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_i = x + e_i \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n = x + e_n \end{cases}$$

Особенностью данной системы уравнений является то, что ***число неизвестных*** x, e_1, e_2, …, e_n всегда ***превышает*** число независимых уравнений, которые могут быть построены по опытным данным. Подобные системы уравнений называют ***недоопределенными***. Недоопределенная фундаментальная система не может быть разрешена формально, а значения неизвестных x, e_1, e_2, …, e_n – вычислены точно. Это приводит к необходимости постановки и решения ***задачи построения оценки*** $\tilde{x}$ величины x по результатам многократных измерений $\{x_i\}_1^n$. Эта оценка в практически значимых случаях только приближенно соответствует истинному числовому значению измеряемой величины ($\tilde{x} \approx x$). Однако в тех случаях, когда при обработке полученных данных правильно используется доступная исследователю информация об измеряемой величине и выбран наилучший (оптимальный) алгоритм построения оценки, степень этого приближения может быть достаточно высока. Именно это обстоятельство придает глубокий практический смысл измерениям, делая их важнейшим инструментом познания окружающего мира. Поиски решения задачи оценивания могут осуществляться с позиций различных подходов. Ранее (в первой части учебного пособия) было показано, что в рамках ***детерминированного подхода*** для построения оценки измеряемой величины по результатам многократных измерений $\{x_i\}_1^n$ требуется привлечение внешнего (не связанного с эмпирическими данными) ***критерия***, определяющего алгоритм (правило) построения оценки. Это позволяло свести задачу оценивания к детерминированной задаче аппроксимации, состоящей в том, что требуется найти точку $\tilde{x}$ (оценку) на числовой оси действительных чисел (представляющей область существования значений величины x), наименее удаленную от точек x_1, x_2, ..., x_n численных значений результатов измерений. ***Меру удаленности*** оценки от измеренных значений, наиболее удачную с точки зрения исследователя, и характеризует используемый ***критерий*** $F(\tilde{x}, x_1, x_2, ..., x_n)$. Оценку же строят в соответствие с условием

$$\tilde{x} = \arg\min_{\tilde{x} \in \Omega} F(\tilde{x}, x_1, x_2, ..., x_n),$$

где множество $\Omega = [x_{\min},\ x_{\max}]$, а $x_{\min}$, $x_{\max}$ – минимальное и максимальное значения результатов измерения, $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$,

Другим подходом, получившим в настоящее время чрезвычайно широкое распространение, является ***вероятностный (статистический) подход*** к оцениванию результатов измерений.

В соответствии с этим подходом случайный характер погрешностей измерений приводит к тому, что измеренное значение x_i может рассматриваться как ***случайная величина***. Если таких измерений провести очень много, для непрерывной случайной величины x количество реализаций $n \to \infty$, то случайный характер результатов измерений уступит место статистической закономерности. Такую закономерность отражает детерминированная функциональная зависимость, устанавливающая связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, – закон распределения случайной величины. Одной из форм закона распределения выступает ***плотность распределения вероятностей*** $p(x)$. Напомним, что эта функция позволяет определить вероятность того, что измеренное значение x_i находится в интервале значений $[x,\ x + dx]$, как

$$P(x < x_i < x + dx) = \int_x^{x+dx} p(x)dx \approx p(x_i)dx.$$

Закон распределения является полной и исчерпывающей характеристикой случайной величины, в частности, результатов измерений. Если точно известен закон распределения x_i, то можно считать, что известно истинное значение измеряемой величины. Обычно оно связано с одним из ***параметров положения*** закона распределения. Чаще всего с ***математическим ожиданием*** $m(x)$ или другим ***центральным моментом*** $m(x^k)$. Для некоторых распределений истинное значение может быть связано с непараметрическими характеристиками положения: ***модой***, ***медианой***. Понятно, что точное знание закона распределения требует проведения бесконечного числа измерений в «неизменных» условиях. Такой бесконечный ансамбль результатов измерений называют ***генеральной совокупностью***. Понятно, что генеральные совокупности результатов измерений физической величины возможны лишь теоретически. Однако их однозначная связь с законом распределения делает это понятие чрезвычайно важным для теории обработки результатов измерений. Любая конечная совокупность результатов измерений объемом $n \geq 1$ рассматривается как ***выборка*** из генеральной совокупности. Тогда задача построения оценки числового значения измеряемой величины рассматривается как задача оценивания по выборке конечного объема параметра статистического распределения для генеральной совокупности. Очевидно, что эта задача, как и задача оценивания с позиций детерминированного подхода, не может быть решена точно. Однако вероятностный (статистический) подход обладает неоспоримым преимуществом. Помимо построения оценки истинного числового значения измеряемой величины в рамках этого подхода удается определить и показатели качества этой оценки, отражающие степень близости параметра и его оценки. Так как получаемые по выборке конечного объема оценки параметров сами являются случайными величинами со своими законами распределения, то параметры этих законов могут служить характеристиками качества получаемых оценок, в частности, их смещения и рассеяния относительно истинного значения.

Таким образом, особенностью обработки результатов измерений и построения оценок числового значения измеряемой величины в рамках вероятностного (статистического) подхода является необходимость знания закона распределения результатов измерений. Это обстоятельство, с одной стороны, подчеркивает практическую важность процедур, направленных на установление с той или иной степенью приближения вида закона распределения данных, получаемых в ходе измерений, а с другой стороны, подтверждает принципиальную необходимость привлечения в процессе оценивания информации о законе распределения, выходящей за пределы опыта и являющейся результатом теоретических построений.

Глава 1
Эмпирический закон распределения результатов измерений

§ 1.1 Представление результатов многократных измерений в виде вариационного ряда

Обычно полученные результаты многократных измерений размера определенной физической величины (например, расстояния или угла) представляют собой множество чисел $\{x_i\}_1^n$, отличающихся своими значениями. Конечное число результатов измерений позволяет представить их в виде реализаций дискретной случайной величины, которую часто называют выборочной случайной величиной. Для того чтобы данные $\{x_i\}_1^n$ могли быть использованы для выявления статистических закономерностей в полученных результатах, а впоследствии – для построения оценки измеряемой величины, эти данные подвергают предварительной обработке, первым этапом которой является ***ранжирование***.

Ранжированием данных измерений называют операцию, заключающуюся в том, что полученные случайные значения x_i, $i=\overline{1,\ n}$ располагают в порядке возрастания (неубывания). Для этого перенумеровывают данные $\{x_i\}_1^n$ таким образом, чтобы выполнялось условие

$$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_i \le \ldots \le x_n .$$

После ранжирования данных их удобно объединить в группы так, чтобы в каждой отдельной группе значения результатов измерений были одинаковы. Тогда ранжированный ряд результатов может быть представлен в следующем виде:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_k < x_{k+1} = \ldots = x_m < x_{m+1} < x_{m+2} < \ldots < x_{p+1} = \ldots = x_n .$$

Очевидно, что в каждую группу может входить один или несколько результатов измерений. Чем точнее измерительный прибор и совершеннее его отсчетное устройство, тем реже будут появляться одинаковые результаты измерений. И наоборот. Фактически конечная разрешающая способность отсчетного устройства и округление результатов в процессе записи приводят к тому, что результаты измерений непрерывной величины (например, расстояния или угла) приобретают свойства реализации дискретной случайной величины. К таким же последствиям приводит и использование современных цифровых измерительных приборов, осуществляющих дискретизацию («квантование») измеряемой величины.

Числовое значение результатов измерений, общее для каждой группы ранжированного ряда называют ***вариантом***, а изменение этого значения при переходе от одной группы к другой – ***варьированием***. Численность отдельной группы этого ряда данных называют ***частотой*** или ***весом*** соответствующего варианта. Отношение частоты данного варианта к общей сумме частот всех вариантов называется ***частостью*** или ***долей*** этого варианта:

$$b_k = m_k / \sum_{k=1}^{u} m_k ,$$

где m_k – количество вариантов в k-й группе (частота);

u – количество групп. Очевидно, что $\sum_{k=1}^{u} m_k = n$. Поэтому

$$b_k = m_k / n .$$

Частость b_k является выборочным (вычисленным по выборке результатов измерений объема n) аналогом вероятности P_x появления значения x_k, случайной величины x.

Подсчет частот и частостей для каждого варианта позволяет представить результаты измерений в виде ***дискретного вариационного ряда***. Так называют ранжированную совокупность вариантов с соответствующими им частотами или частостями.

Пример. При проведении измерений некой физической величины получена совокупность дискретных отсчетов: 2; 1; 3; 1; 4; 5; 1; 3; 4; 1; 2; 3; 1; 2; 2; 1; 2; 1; 1; 3; 1; 1; 3; 1; 3; 1; 2; 4; 4; 5; 2; 2; 1; 2; 3; 2; 1; 3; 3; 2; 2; 3; 2; 1; 2; 2; 3; 2; 5; 2; 7; 2; 4; 2; 3; 2; 3; 1; 3; 4.

После их ранжирования получим 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 7. Совокупности результатов характеризуют шесть вариантов с числовыми значениями: 1; 2; 3; 4; 5; 7. Соответствующие частоты вариантов: 16; 20; 14; 6; 3; 1. Учитывая, что всего было осуществлено 60 измерений, соответствующие варианты будут иметь следующие частости:

$$b_1 = 4/15 = 0{,}267;\ b_2 = 1/3 = 0{,}333;\ b_3 = 7/30 = 0{,}233;$$
$$b_4 = 1/10 = 0{,}100;\ b_5 = 1/20 = 0{,}050;\ b_6 = 1/60 = 0{,}017.$$

Чаще при измерении значений непрерывной величины в совокупности полученных данных не удается выделить отчетливо различающиеся варианты, так как практически отсутствуют одинаковые значения результатов. В подобных случаях следует строить ***интервальный вариационный ряд*** распределения. Для построения такого ряда вначале определяют диапазон варьирования значений случайной величины (результатов измерений). Часто его называют ***выборочный размах***, а вычисляют по формуле

$$V = x_{max} - x_{min},$$

где x_{max}, x_{min} – наибольшее и наименьшее из полученное значений результатов измерений. Диапазон значений разбивают на отдельные интервалы и рассчитывают частоту попадания значений величины в каждый частичный интервал. Таким образом, ***интервальным вариационным рядом*** называют упорядоченную совокупность ***интервалов варьирования*** значений результатов измерений с подсчитанными частотами (или частостями) попаданий в каждый из них соответствующих измеренных значений величины.

Важнейшим вопросом построения интервального вариационного ряда является выбор величины интервала, используемого для группировки элементов ряда (результатов измерений). Такой выбор обычно осуществляют с учетом того, что интервальный вариационный ряд используется, прежде всего, для построения гистограмм (или полигонов), отражающих в графической форме эмпирические законы распределения непрерывных случайных величин (результатов измерений). Помимо того, что гистограмма (полигон) является удобным средством визуализации характера экспериментальных данных, она представляет собой приближение функции распределения вероятности. Следовательно, относительное число элементов каждой группы (частость b_k) показывает вероятность того, что следующее значение измеряемой величины попадет в данную группу. Излишне большое число групп при разбиении диапазона измеренных значений на малые интервалы может дать слишком «скачущий» график гистограммы, а слишком малое (при большой ширине интервалов) – неестественно «сглаженный». Целесообразно иметь такое число групп (интервалов разбиения множества результатов измерений), обеспечивающее наименьшее отклонение гистограммы от функции распределения вероятности, т.е. позволяющее дать наиболее точную оценку формы функции распределения вероятности для генеральной совокупности.

В настоящее время для целей определения количества интервалов вариационного ряда используются несколько правил.

Формула Стерджесса, обоснованная для случая нормального закона распределения элементов вариационного ряда

$$u = 1 + \log_2 n = 1 + 3{,}322 \lg n,$$

где n – объем выборки.

Более точные формулы построены так, что они отражают отличие эмпирического закона распределения от нормального. Эти формулы учитывают не только количество элементов вариационного ряда, но и характер их вариации. К ним относятся:

- формула Скотта: $h = 3{,}5 S n^{-1/3}$, где h – длина интервала, S – стандартное отклонение значений ряда измерений;

- формула Фридмана-Диакониса: $h = 2(IQ)n^{-1/3}$, где (IQ) – разница между верхним и нижним квартилями ряда[1];

- формула для оптимальной ширины интервала вариационного ряда: $h_{opt} = 1{,}26 p^{1/3}(p')^{-2/3} n^{-1/3}$, где $p(x)$, $p'(x)$ – подлежащая определению неизвестная функция плотности вероятности и ее производная соответственно. Заметим, что последние три формулы рекомендуют выбирать количество интервалов $u \sim \sqrt[3]{n}$. Если же окажется, что u дробное число, то количество интервалов выбирают равным ближайшему к нему целому числу. Результаты расчета по различным формулам показывают, что при количестве элементов вариационного ряда $n = 100$ количество интервалов $u = 5 \div 7$, а при $n = 1000$ – $u = 10 \div 12$.

Рассчитав число и ширину интервалов, определяют, сколько измеренных значений попало в каждый конкретный интервал. При этом в интервал включают значения величины, большие или равные нижней границе и меньшие верхней границы, то есть

[1] Квартили делят вариационный ряд на четыре равные части по накопленным частотам, средним квартилем является медиана

нижняя граница интервала входит в него, а верхняя – нет. За начало первого интервала рекомендуют брать величину

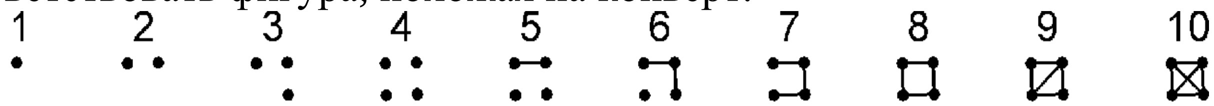
$$x_{start} = x_{\min} - h/2 .$$

Тогда граница последнего интервала x_{fin} определяется исходя из следующего условия:

$$x_{fin} - h \le x_{\max} < x_{fin} .$$

Промежуточные интервалы строят, прибавляя к граничному значению предыдущего интервала длину h следующего.

Многолетний опыт ручной обработки больших массивов экспериментальных данных позволил выработать такую технологию разбиения всего массива на отдельные группы. Граничные значения последовательности интервалов записывают в столбец, а затем, просматривая данные в том порядке, в котором они были получены, проставляют справа от числа, отражающего левую границу соответствующего интервала, точки или черточки. Каждому числу результатов, не превышающему десятка, будет соответствовать фигура, похожая на конверт:



После завершения очередного десятка (появления «запечатанного конверта») процесс счета (и формирования очередного «конверта») начинается снова. На рисунке 1.1 представлены графические образы следующих чисел: 21, 47, 64.

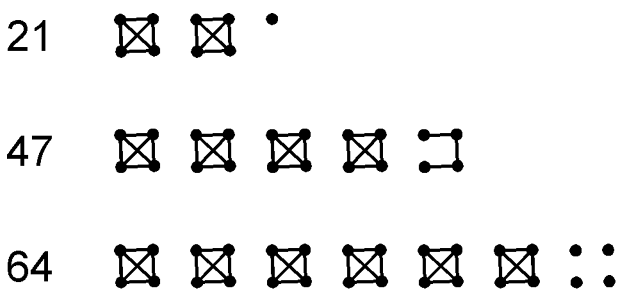


Рис. 1.1. Пример применения метода «конвертов» для обозначения подсчитанного количества результатов в отдельных интервалах вариационного ряда.

Число элементов вариационного ряда (результатов измерений), попавших в каждый отдельный интервал, обычно называют ***интервальными частотами***, а их отношения к общему числу измерений – ***интервальными частостями***. При вычислении интервальных частостей округление результатов следует проводить таким образом, чтобы общая сумма частостей была равна ***единице***.

§ 1.2 Построение гистограмм

Систематизированные и предварительно обработанные результаты измерений в виде вариационного ряда могут быть представлены графическими образами, называемыми гистограммами и полигонами.

Гистограмма – способ графического представления статистических данных в виде столбчатой диаграммы.

Так как закон распределения случайной величины (результата измерений) может представляться в двух основных формах:

- интегрального закона – функции распределения;

- дифференциального закона – плотности распределения вероятностей, то и гистограммы, построенные по данным вариационного ряда, могут иметь две разные формы. Чаще применяют гистограммы плотности частостей вариационного ряда. Такие гистограммы строят следующим образом.

По оси абсцисс откладывают границы интервалов, и на каждом из обозначенных отрезков, как на основаниях, строят прямоугольники, ***площадь*** каждого из которых равна частости $b_i = m_i / n$ для данного интервала. Поэтому высота каждого столбца гистограммы равна $m_i / nh = b_i / h$, где $h = V / u$ – ширина интервала. Из способа построения следует, что полная площадь гистограммы равна единице:

$$\sum_{i=1}^{u} m_i h / nh = \sum_{i=1}^{u} m_i / n = \sum_{i=1}^{u} m_i / \sum_{i=1}^{u} m_i = 1.$$

Пример. Произведено $n = 500$ измерений углового положения (например, горизонтального угла) между некоторыми объектами (знаками) на местности. По результатам измерений вычислено среднее значение угла и уклонения каждого из результатов относительно среднего. Числовые значения этих уклонений (измеренные в угловых минутах) сведены в вариационный ряд, выборочный размах ($V = 28$) которого разделен на 8 интервалов

($u \sim \sqrt[3]{n} \approx 8$). В таблице 1.1 представлены данные вариационного ряда, отражающего результаты проведенных угловых измерений.

Тогда гистограмма имеет вид, представленный на рисунке 1.2.

Таблица 1.1 – Результаты измерения уклонений угловых измерений от среднего значения горизонтального угла

i	$x_{i\max}$, $x_{i\min}$	m_i	b_i	b_{Si}	b_i / h
1	-14; $-10{,}5$	6	0,012	0,012	0,0034
2	$-10{,}5$; -7	25	0,050	0,062	0,0143
3	-7; $-3{,}5$	72	0,144	0,206	0,0411
4	$-3{,}5$; 0	133	0,266	0,472	0,076
5	0; $3{,}5$	120	0,240	0,712	0,066
6	$3{,}5$; 7	88	0,176	0,888	0,05
7	7; $10{,}5$	46	0,092	0,980	0,026
8	$10{,}5$; 14	10	0,020	1,000	0,0057

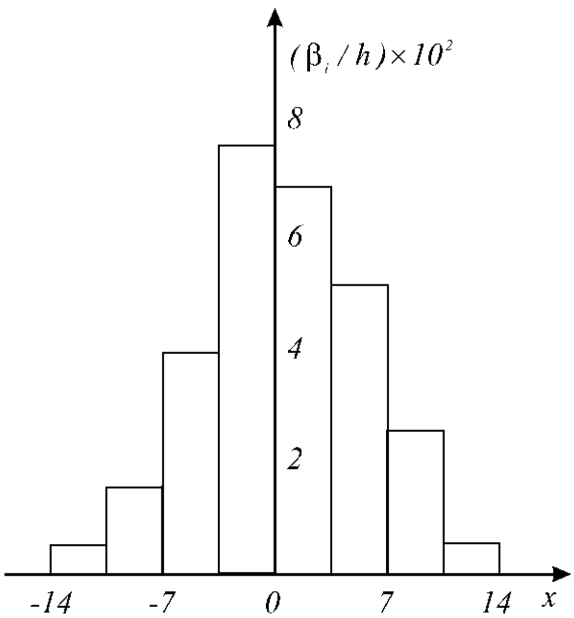


Рис. 1.2. Пример построения гистограммы для дифференциального эмпирического закона распределения (на основе данных таблицы 1.1)

Следует отметить, что если изменить масштаб измеряемой величины и ввести новую – $y = x / h$, то в этом случае каждый интервал вариационного ряда будет иметь ***единичную ширину***.

Действительно, после изменения масштаба результатов измерений $y_{i\max} - y_{i\min} = (x_{i\max} - x_{i\min}) / h = h / h - 1$. В этом случае высота отдельной ячейки гистограммы равна интервальной частости b_i.

Ранее отмечалось, что отношение $m_i / n = b_i$ есть доля результатов, оказавшихся в указанном интервале. Поэтому частость b_i имеет смысл вероятности попадания результата отдельного измерения в данный интервал. Выражение m_i / nh, получаемое после деления m_i / n на ширину интервала h, приобретает смысл ***плотности вероятности***. При очень большом количестве измерений ($n \to \infty$) весь диапазон изменения величины x можно разбить на бесконечно малые интервалы dx, как это делается в математике, и найти количество результатов dn в каждом из них. В этом случае гистограмма превратится в плавную кривую – график функции

$$p(x) = dn / ndx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ h \to 0}} \frac{m}{nh}.$$

Такую функцию называют ***плотностью вероятности***.

Это соотношение показывает, что по мере увеличения объема выборки и все большего приближения к объему генеральной совокупности гистограмма, представляющая выборочное распределение все более приближается к истинному виду функции плотности распределения, отражающему статистические свойства генеральной совокупности. Если придерживаться убеждения о том, что закон распределения генеральной совокупности содержит в себе истинное значение измеряемой величины в качестве одного из параметров, то разумно предположить, что определение аналогичного параметра для выборочного распределения позволит приближенно установить значение этого же параметра для генеральной совокупности и тем самым обеспечить формирование оценки истинного значения измеряемой величины.

Рассмотрим теперь способ построения гистограммы эмпирической функции распределения. Пусть имеется выборочная совокупность $\{x_i\}_1^n$ значений результатов измерений объема n ($i = \overline{1, n}$), организованная в виде вариационного ряда, и каждому варианту x_i поставлена в соответствие его частость $b_i = m_i / n$.

Пусть далее x_0 – некоторое действительное число, а m_{xo} – число выборочных значений случайной величины x, меньших x_0. Тогда число m_{xo}/n является частостью наблюдаемых в выборке значений величины x, меньших x_0, т. е. частостью появления события $x < x_0$. При изменении x_0 в общем случае будет изменяться и величина m_{xo}/n. Это означает, что отношение m_{xo}/n является функцией аргумента x. Эту функцию и называют выборочной или эмпирической функцией распределения. Таким образом, ***выборочной функцией распределения*** (или функцией распределения выборки) называют функцию $\widetilde{F}(x) = m_{xo}/n$, задающую для каждого значения x относительную частоту события $x < x_0$.

Для ее построения по данным вариационного ряда достаточно вычислить так называемые накопленные частости:

$$b_{\Sigma 1} = b_1 = m_1/n;$$

$$b_{\Sigma 2} = b_1 + b_2 = (m_1 + m_2)/n;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{\Sigma i} = b_1 + b_2 + \ldots + b_i = (m_1 + m_2 + \ldots + m_i)/n.$$

Очевидно, что накопленная частость для последнего интервала вариационного ряда ($i = u$) равна

$$b_{\Sigma u} = \sum_{i=1}^{u} m_i/n = 1.$$

Сопоставляя каждому интервалу соответствующую накопленную частость $b_{S\,i}$ и строя на основании равном ширине каждого интервала, прямоугольник высотой $b_{S\,i}$, формируют гистограмму данного типа. На рисунке 1.3 представлена гистограмма, построенная по данным таблицы 1.1 (значения $b_{\Sigma i}$ взяты из ее пятой строки).

Функция $\widetilde{F}(x) = m_{xo}/n = b_{\Sigma\,i}(x)$ обладает теми же свойствами, что и теоретическая функция распределения $F(x)$:

1) $0 \le \widetilde{F}(x) \le 1$;

2) $\widetilde{F}(x)$ – неубывающая функция;

3) $\widetilde{F}(-\infty) = 0$; $\widetilde{F}(\infty) = 1$.

Очевидно, что

$$F(x)=\lim_{\substack{n\to\infty\\ h\to 0}}\widetilde{F}(x).$$

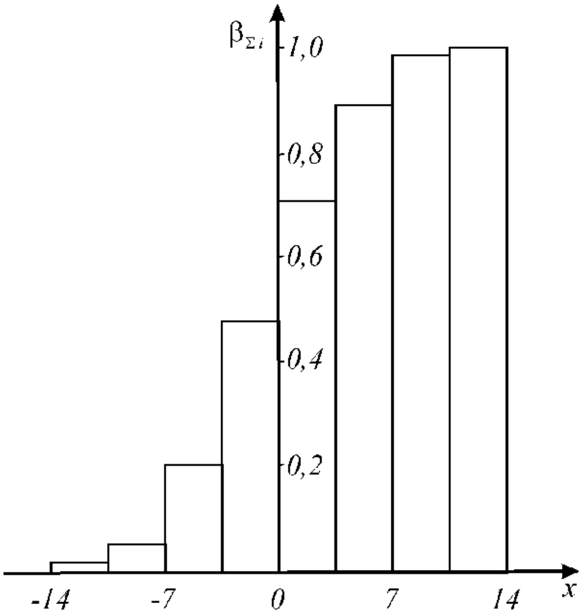


Рис. 1.3. Пример построения гистограммы для интегрального эмпирического закона распределения (на основе данных таблицы 1.1)

§ 1.3 Построение полигонов

Помимо гистограмм для графического представления данных интервального вариационного ряда используют ***полигон*** относительных частот. На рисунке 1.4 представлен полигон (ломаная линия), построенный для тех же данных, что и гистограмма на рисунке 1.2 (пунктирная линия). Для его построения интервальный вариационный ряд представляют в виде дискретного вариационного ряда. В этом случае для i-го интервала ряда определяют некоторое характерное значение, которое принимают за вариант x_i.

В качестве него может быть выбрано ***срединное значение*** из попавших в интервал результатов измерений

$$x_i=(x_{i\max}+x_{i\min})/2,$$

где $x_{i\,max}$, $x_{i\,min}$ – наибольшее и наименьшее из значений результатов измерений, попавших в i-й интервал, или ***среднее арифметическое*** [6] значений результатов измерений, попавших в i-й интервал

$$x_i = \left(\sum_{j-1}^{m_i} x_{ij} \right) / m_i ,$$

где m_i – количество результатов x_{ij}, попавших в i-й интервал (частота); $i = \overline{1,\ u}$; $j = \overline{1,\ m_i}$. Соответствующую интервальную частоту m_i принимают за частоту варианта x_i. Далее из точек x_i строят перпендикуляры, откладывают на них отрезки, равные по величине значению m_i / nh и соединяют отрезками прямых концы соседних отрезков. Площадь фигуры, ограниченной ломаной линией полигона, как и площадь, ограниченная гистограммой (ступенчатая пунктирная линия на рисунке 1.4), равна единице.

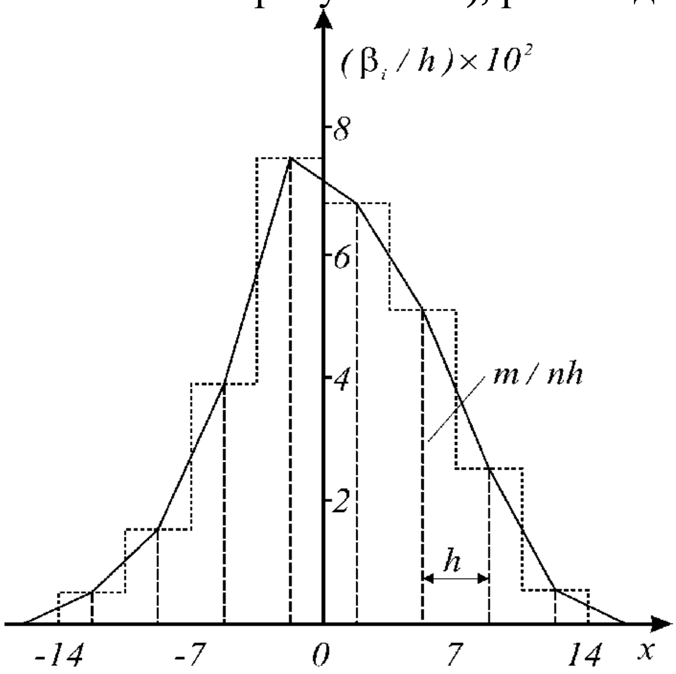


Рис. 1.4. Пример построения полигона относительных частот

Следует обратить внимание на то, что выбор положения дискретного варианта x_i внутри i-го интервала как среднего арифметического от значений результатов, попавших в интервал, может привести к тому, что расстояния между точками x_i станут неодинаковыми. Однако по мере увеличения объема выборки и уменьшения ширины интервалов различия между полигонами, построенными при различных способах выбора варианта x_i, быстро исчезают. Второй формой полигона (так же, как и гистограммы) является графическое представление эмпирической (выборочной) функции распределения.

На рисунке 1.5 представлен полигон (ломаная линия), построенный для тех же данных, что и гистограмма на рисунке 1.3 (пунктирная линия).

Здесь также для i-го интервала ряда определяют некоторое характерное значение, которое принимают за вариант x_i. На рисунке 1.5 в качестве x_i были выбраны середины интервалов. Именно этим значениям были сопоставлены соответствующие накопленные частости b_{Si}.

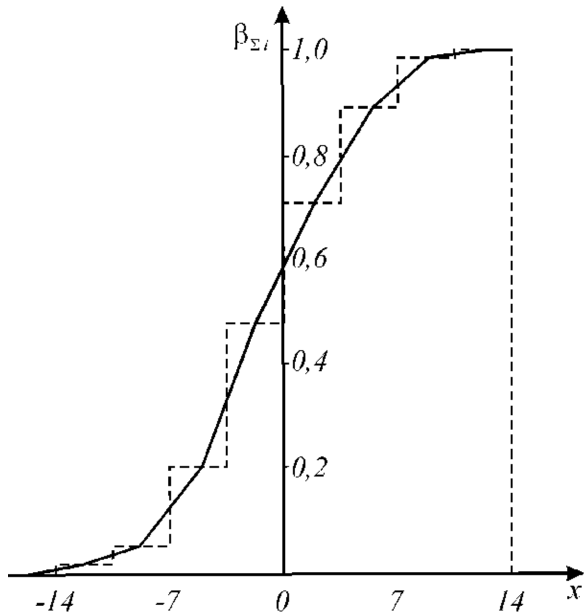


Рис. 1.5. Пример построения полигона выборочной функции распределения

Контрольные вопросы и задания

1. В чем заключается сущность вероятностного (статистического) подхода к обработке результатов измерений физической величины? В чем отличие и сходство вероятностного и детерминированного подходов?

2. Дайте определения (применительно к многократным измерениям значения физической величины) понятиям «генеральная совокупность» и «выборка»?

3. Как осуществляется операция ранжирования данных измерений? Что такое вариационный ряд? Определите понятие «ва-

риант». В чем различие дискретного и интервального вариационных рядов?

4. Дайте определение понятию «частость». Как частость соотносится с вероятностью?

5. Какими основными правилами руководствуются при определении количества интервалов вариационного ряда?

6. Что такое гистограмма? В чем заключается последовательность действий при построении эмпирического закона распределения результатов измерений?

7. Как связаны теоретический и эмпирический законы распределения результатов измерения?

8. Что такое «полигон»? В чем заключается его отличие от гистограммы?

9. Постройте гистограмму по следующим данным:

Вариант 1:

0,7; 1,0; 1,3; 1,6; 1,9; 2,0; 2,1; 2,2; 2,5; 2,6; 2,8; 2,9; 3,0; 3,0; 3,1; 3,1; 3,2; 3,3; 3,5; 3,6; 3,7; 3,8; 3,9; 3,9; 4,0; 4,0; 4,1; 4,1; 4,1; 4,1; 4,2; 4,2; 4,3; 4,3; 4,4; 4,5; 4,5; 4,6; 4,6; 4,7; 4,8; 4,8; 4,8; 4,9; 4,9; 4,9; 4,9; 5,0; 5,0; 5,1; 5,1; 5,1; 5,1; 5,2; 5,2; 5,3; 5,3; 5,4; 5,5; 5,5; 5,6; 5,6; 5,7; 5,8; 5,8; 5,8; 5,9; 5,9; 6,0; 6,0; 6,1; 6,2; 6,2; 6,3; 6,3; 6,4; 6,5; 6,5; 6,6; 6,6; 6,7; 6,8; 6,9; 7,0; 7,2; 7,2; 7,5; 7,5; 7,6; 7,6; 7,7; 7,8; 7,9; 8,0; 8,2; 8,5; 8,6; 8,9; 9,0; 9,2

Вариант 2:

0,5; 1,0; 1,2; 1,6; 1,7; 2,0; 2,2; 2,2; 2,5; 2,7; 2,8; 2,9; 3,0; 3,0; 3,1; 3,2; 3,2; 3,3; 3,5; 3,7; 3,7; 3,8; 3,8; 3,9; 4,0; 4,0; 4,1; 4,1; 4,1; 4,2; 4,2; 4,2; 4,3; 4,3; 4,4; 4,4; 4,5; 4,6; 4,6; 4,7; 4,8; 4,8; 4,9; 4,9; 4,9; 4,9; 4,9; 5,0; 5,0; 5,0; 5,1; 5,1; 5,1; 5,1; 5,2; 5,3; 5,3; 5,4; 5,5; 5,5; 5,6; 5,7; 5,7; 5,8; 5,8; 5,8; 5,9; 5,9; 6,0; 6,1; 6,1; 6,2; 6,2; 6,2; 6,3; 6,4; 6,5; 6,6; 6,6; 6,6; 6,7; 6,8; 6,9; 7,0; 7,0; 7,2; 7,5; 7,5; 7,6; 7,7; 7,7; 7,8; 7,9; 8,0; 8,4; 8,5; 8,6; 8,9; 9,0; 9,6

Вариант 3:

0,8; 1,0; 1,2; 1,5; 1,9; 2,0; 2,1; 2,1; 2,5; 2,6; 2,6; 2,9; 3,0; 3,0; 3,1; 3,2; 3,2; 3,3; 3,5; 3,5; 3,7; 3,8; 3,9; 3,9; 4,0; 4,0; 4,1; 4,1; 4,1; 4,2; 4,2; 4,2; 4,3; 4,3; 4,4; 4,4; 4,5; 4,6; 4,6; 4,7; 4,7; 4,8; 4,8; 4,9; 4,9; 4,9; 4,9; 5,0; 5,0; 5,1; 5,1; 5,1; 5,2; 5,2; 5,2; 5,3; 5,3; 5,4; 5,4; 5,5; 5,6; 5,6; 5,7; 5,8; 5,8; 5,9; 5,9; 5,9; 6,0; 6,0; 6,1; 6,2; 6,2; 6,3; 6,4; 6,4; 6,5; 6,5; 6,6; 6,7;

6,7; 6,8; 6,9; 7,0; 7,1; 7,2; 7,4; 7,5; 7,6; 7,6; 7,8; 7,8; 7,9; 8,0; 8,2; 8,5; 8,7; 8,9; 9,0; 9,1

Вариант 4:
0,3; 1,0; 1,3; 1,4; 1,8; 2,0; 2,1; 2,1; 2,4; 2,6; 2,8; 2,9; 3,0; 3,1; 3,1; 3,1; 3,2; 3,3; 3,5; 3,6; 3,7; 3,8; 3,8; 3,9; 4,0; 4,1; 4,1; 4,1; 4,1; 4,1; 4,2; 4,3; 4,3; 4,4; 4,4; 4,5; 4,5; 4,6; 4,7; 4,7; 4,8; 4,8; 4,9; 4,9; 4,9; 4,9; 5,0; 5,0; 5,0; 5,1; 5,1; 5,1; 5,2; 5,2; 5,2; 5,3; 5,3; 5,4; 5,5; 5,5; 5,5; 5,6; 5,7; 5,8; 5,8; 5,8; 5,8; 5,9; 6,0; 6,0; 6,1; 6,1; 6,2; 6,3; 6,4; 6,4; 6,5; 6,5; 6,6; 6,6; 6,7; 6,8; 6,9; 7,0; 7,1; 7,1; 7,3; 7,5; 7,6; 7,6; 7,7; 7,8; 7,9; 8,0; 8,1; 8,5; 8,8; 8,9; 9,0; 9,3

Список литературы к главе 1

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Высшая школа, 1998. – 575 с.

2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 464 с.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2003. – 479 с.

4. Константинова Л.И. Теория вероятностей и математическая статистика / Л.И. Константинова. – Томск : Изд-во Национального исследовательского Томского политехнического университета, 2010. – 153 с.

5. Лесных Н.Б. Законы распределения случайных величин в геодезии / Н.Б. Лесных. – Новосибирск : Изд-во Сибиркой государственной геодезической академии, 2005. – 129 с.

Глава 2
Приближенное оценивание параметров закона распределения генеральной совокупности по выборке конечного объема

§ 2.1 Свойства оценок результата измерений

В общем случае любая функция от значений измерений $\{x_i\}_1^n$, принимаемая в качестве подходящего значения неизвестного параметра (величины) $\tilde{x} = f(x_1,...,x_i,...,x_n)$, называется ***оценкой*** этого параметра. В рамках статистического подхода множество значений $\{x_i\}_1^n$, полученных в ходе многократных прямых измерений физической величины x, является основой для построения оценок неизвестных параметров генеральной совокупности, а в конечном итоге – оценки истинного значения измеряемой величины. Важно подчеркнуть, что оценки неизвестных параметров функции распределения выборочной случайной величины также являются случайными величинами, сходящимися по вероятности (при $n \to \infty$) к своим предельным значениям – параметрам распределения генеральной совокупности. Например, для многих физических величин, обладающих непрерывных законов распределения измеренных значений, числовыми параметрами являются математическое ожидание

$$\bar{x} = m(x) = \int_{\Omega} xp(x)dx,$$

которое сопоставляют с истинным значением измеряемой величины, и дисперсия

$$s^2 = \int_{\Omega} [x - m(x)]^2 p(x)dx),$$

которая характеризует разброс значений отдельных измерений в рамках генеральной совокупности. Здесь Ω – область возможных значений величины x.

В ряде случаев лучшими оценками истинного значения будут являться не математическое ожидание, а другие ***характеристики положения*** закона распределения (центра кривой функции плотности распределения вероятности) результатов измерений, например, медиана, мода, срединный размах, центр размаха и другие. Со многими из них мы уже сталкивались при изучении процедур оценивания результатов измерений с позиций детерминированного подхода.

Поскольку все перечисленные виды оценок по выборке конечного объема являются случайными величинами, выбор их неоднозначен. Однако существует ряд требований, которым должны удовлетворять лучшие из возможных оценок:

1) они должны быть ***состоятельными оценками***, то есть сходиться по вероятности к оцениваемому значению при $n \to \infty$;

2) они должны быть ***несмещенными оценками***, то есть их математическое ожидание должно быть равно оцениваемому значению;

3) они должны быть ***эффективными оценками***, то есть их выборочное распределение должно иметь наименьшую дисперсию.

Требование «состоятельности» предъявляют к статистическим оценкам при рассмотрении выборок большого объема. Требование «несмещенности» приводит к необходимости выполнения следующего условия: математическое ожидание оценки должно при любом числе измерений совпадать с истинным значением величины. Если выбранная несмещенная оценка по сравнению с другими возможными оценками имеет меньшую дисперсию, то такая оценка обладает большей эффективностью.

Свойства таких оценок иллюстрирует последовательность графиков, представленная на рисунке 2.1. На каждом графике этого рисунка результаты повторных измерений величины x изображены в виде отдельных квадратов и нанесены на числовую ось по мере их появления в процессе измерения. Количество квадратов отражает число осуществленных измерений к некоторому фиксированному моменту времени, а место расположения каждого квадрата на оси определяется значением этого результата. В левой части графиков группируются результаты с меньшими значениями, в правой – с большими. При малом количестве измерений (графики 1 – 3) статистическая закономерность еще не выявляется. Однако по мере увеличения количества измерений совокупность квадратов начинает формировать фигуру (графики 4, 5), которая характеризует ***свойства группировки*** случайных величин – отдельных отсчетов величины x: возможный разброс результатов измерений, асимметрию, относительную долю совпадающих отчетов и др. В пределе при $n \to \infty$ данная фигура (гистограмма) позволяет выявить закон распределения генеральной совокупности (график 6).

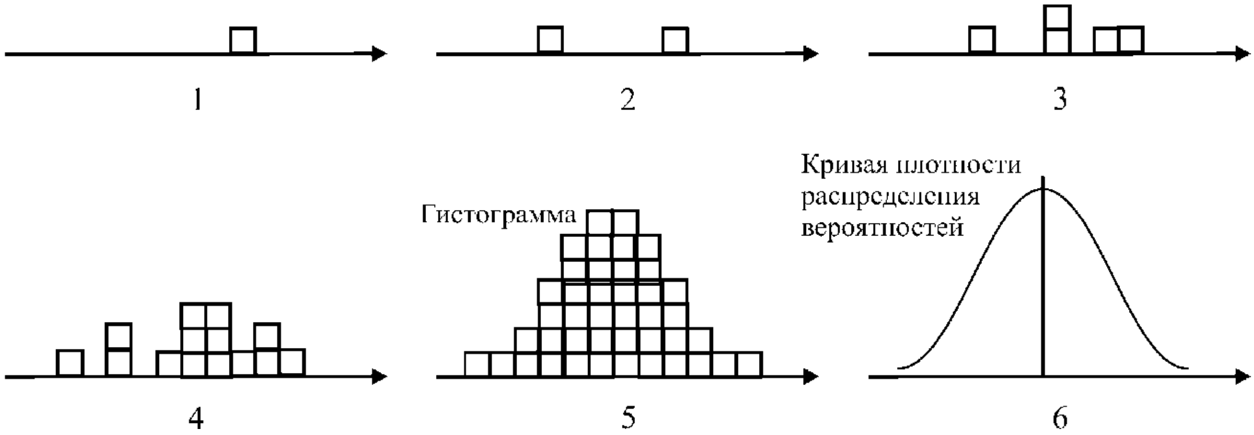


Рис. 2.1. Проявление статистических закономерностей по мере увеличения числа измерений: 1 – n = 1, 2 – n = 2, 3 – n = 5, 4 – n = 14, 5 – n = 42, 6 – $n \to \infty$

В ходе проведения геодезических работ редко удается осуществить многократные измерения одной и той же величины большого объема. Это не позволяет исследовать асимптотическое (при $n \to \infty$) поведение получаемых оценок. Поэтому в большинстве практически важных случаев исходят из следующих предположений о свойствах погрешностей геодезических измерений:

- в длинном ряду измерений положительные и отрицательные случайные погрешности одинаково возможны, то есть одинаково часто встречаются (свойство симметричности);
- малые по абсолютной величине случайные погрешности проявляются чаще, чем большие (свойство унимодальности);
- среднее арифметическое случайных погрешностей равноточных измерений одной и той же величины при неограниченном возрастании числа измерений стремится к нулю, то есть

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} e_i}{n} = 0,$$

где $e_i = x_i - x$ – погрешность i-ого результата измерений, его отклонение от истинного значения x. В длинном ряду измерений равновеликие положительные и отрицательные погрешности встречаются одинаково часто (свойство компенсации);

- для фиксированных условий измерений случайные погрешности не превышают по абсолютной величине известного предела (свойство ограниченности).

Первые три свойства обуславливают целесообразность использования для описания статистических свойств результатов геодезических измерений модели нормального (гауссовского) закона распределения их генеральной совокупности

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}\,s} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2s^2} \right].$$

Здесь x – текущее значение результата измерения; $\bar{x} = m(x)$ – среднее значение (математическое ожидание закона распределения генеральной совокупности), сопоставляемое с истинным значением измеряемой величины; s^2 – дисперсия результатов измерения, образующих генеральную совокупность (s – среднеквадратическое отклонение результатов измерения).

Четвертое свойство (свойство ограниченности), являющееся следствием того, что любая оценка, построенная по результатам реальных многократных измерений, должна быть средним по Коши (см. первую часть учебного пособия), на первый взгляд, отвергает модель статистических свойств результатов измерений в виде нормального закона распределения. Этот вывод связан с тем, что область значений случайной величины распределенной по нормальному закону, неограничена и простирается от $-\infty$ до $+\infty$, в то время как значения результатов измерений всегда ограничены. Однако это обстоятельство не играет кардинальной роли в практическом использовании этой модели, так как вероятность появления очень больших (как положительных, так и отрицательных) значений исчезающе мала. Кроме того, четвертое следствие является гарантией того, что оценка параметра рассеяния генеральной совокупности результатов измерений является ***гарантированной*** (несколько завышенной по сравнению с действительным значением). Это связано с тем, что теоретическая модель статистического поведения случайных величин, основанная на модели нормального закона, предполагает наличие редких, но бесконечно больших (по абсолютной величине) значений отклонений от наиболее вероятного. В реальности такие отклонения ***невозможны***, более того все выбросы результатов измерений, выходящие за пределы некоторого диапазона значений всегда исключаются из массивов данных измерений.

Следует отметить, что в ряде случаев статистические свойства результатов геодезических измерений могут описываться и другими законами распределения, например, законом Лапласа, законом Коши, гамма-распределениями различных типов и другими. Однако чаще всех применим именно нормальный закон.

§ 2.2 Особенности нормального закона распределения результатов измерений

Нормальный закон распределения наблюдается в тех случаях, когда расхождения результатов обусловлены большим числом независимых причин и ни одна из них не доминирует над остальными. На рисунке 2.2 показаны кривые нормального закона распределения для некоторой измеряемой величины *x*. По оси абсцисс отложены значения величины *x*, а по оси ординат – ***плотность вероятности*** их появления $p(x)$. Параметрами нормального закона распределения являются: ***математическое ожидание*** $m(x)$, вокруг которого группируются результаты отдельных измерений, и ***дисперсия*** s^2, которая является мерой рассеяния результатов относительно $m(x)$. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины *x*, распеределенной по нормальному закону определяются выражениями:

$$\bar{x} = \frac{1}{s\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-m(x))^2}{2s^2}} dx =_{(x=sy+m(x))} = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} (sy+a) e^{-\frac{y^2}{2}} dy =$$

$$= \frac{s}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy + m(x) \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 0 + m(x) \frac{1}{\sqrt{2p}} \sqrt{2p} = m(x).$$

$$D(x) = \frac{1}{s\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} [x-m(x)]^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}} dx =_{(x=sy+m(x))} = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} (sy)^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy =$$

$$= \frac{s^2}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{s^2\sqrt{p}}{\sqrt{2p} \cdot 2/2\sqrt{2}} = s^2 .$$

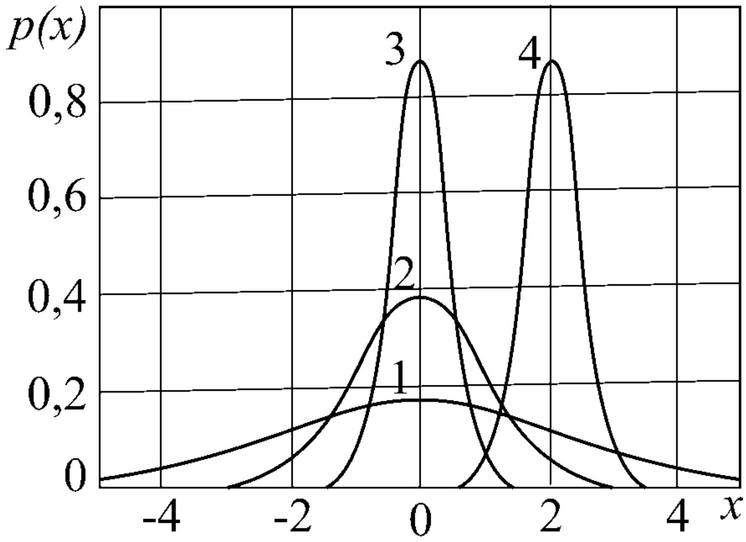


Рис. 2.2. Графики плотности вероятности нормального распределения:
$1 - m(x) = 0,\ s^2 = 5$; $2 - m(x) = 0,\ s^2 = 1$; $3 - m(x) = 0,\ s^2 = 0{,}2$;
$4 - m(x) = 2,\ s^2 = 0{,}2$

Таким образом кривые 1 – 3 на рисунке 2.2 соответствуют случаю, когда $m(x) = 0$, а кривая 4 – случаю, когда $m(x) \neq 0$. Следовательно, кривые 1 – 3 отражают вид нормального распределения погрешности измерения величины x. В этом случае формула распределения имеет вид

$$p(e) = \frac{1}{\sqrt{2p}\, s} \exp\left[-\frac{e^2}{2s^2} \right],$$

где $e = x - m(x)$ – погрешность измерений, его отклонение от истинного значения x, совпадающего с математическим ожиданием (средним значением) $m(x)$ для генеральной совокупности. Различия вида кривых 1 – 3 определяются значениями дисперсий распределений, для которых справедливо соотношение

$$s_1^2 > s_2^2 > s_3^2.$$

Нижний индекс соответствует номеру кривой.

Рассмотрим другие свойства кривой нормального распределения. Судя по рисунку 2.2, эта кривая обладает максимумом. Экстремум функции можно исследовать с помощью первой производной

$$p'(x) = \frac{x - m(x)}{s^3 \sqrt{2p}} \exp\left\{ -\frac{[x - m(x)]^2}{2s^2} \right\}.$$

Положение экстремума определяется из уравнения $p'(x) = 0$. Решением этого уравнения является $x = m(x)$, то есть экстремум соответствует положению математического ожидания нормального распределения. При этом $p'(x) > 0$ при $x < m(x)$ и $p'(x) < 0$ при $x > m(x)$. То есть в точке $x = m(x)$ плотность нормального распределения достигает максимума. Следовательно, точка $x = m(x)$ определяет положение ***моды*** (наиболее вероятного значения) нормального распределения. При этом величина максимума равна

$$\max\{p(x)\} = \frac{1}{s\sqrt{2p}}.$$

Чем больше дисперсия нормального распределения, тем меньше плотность вероятности в максимуме функции $p(x)$. Кривая плотности распределения вероятности нормального распределения обладает единственным максимумом, поэтому данное распределение относят к классу ***одномодальных***.

Если проинтегрировать функцию $p(x)$ нормального распределения на интервалах от $-\infty$ до $m(x)$ и от $m(x)$ до ∞ получим

$$\frac{1}{s\sqrt{2p}}\int_{-\infty}^{m(x)} \exp\left\{-\frac{[x-m(x)]^2}{2s^2}\right\}dx = \frac{1}{\sqrt{2p}}\int_{m(x)}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{[x-m(x)'^2}{2s^2}\right\}dx = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, кривая нормального распределения симметрична относительно прямой проходящей через точку $x = m(x)$. Площади фигур, ограниченных левой ветвью кривой $p(x)$, осью ординат и прямой проходящей через точку $x = m(x)$ перпендикулярно оси x, а также правой ветвью кривой $p(x)$, осью ординат и прямой проходящей через точку $x = m(x)$ перпендикулярно оси x, равны между собой. Следовательно, равны вероятности событий, заключающихся в том, что x примет значение меньшее или большее $m(x)$. Таким образом, точка $x = m(x)$ определяет не только положение математического ожидания и моды нормального распределения, но и его ***медианы***. Эти же соображения подтверждают симметричность кривой нормального распределения относительно координатной линии, проходящей через точку $x = m(x)$. В качестве меры симметрии кривой статистического распределения в теории вероятностей используют коэффициент асимметрии

$$k_{as}=\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}[x-m(x)]^3 p(x)dx}{\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}[x-m(x)]^2 p(x)dx\right\}^{3/2}}.$$

Можно показать, что для нормального распределения (как для любого симметричного распределения) коэффициент k_{as}=0

Интегрирование функции $p(x)$ в пределах от $-\infty$ до ∞, то есть по всей области значений переменной *x*, дает значение, равное единице для любых $m(x)$ и s^2. Эта величина соответствует вероятности появления результата измерений с любым значением из области возможных, то есть является вероятностью достоверного события. Следет отметить, что данное условие выполняется для любого закона распределения величины x.

Рассмотрим положение точек перегиба кривой $p(x)$ нормального распределения. Координаты кочек перегиба определяют путем исследования второй производной

$$p''(x)=\frac{1}{s^3\sqrt{2p}}\exp\left\{-\frac{[x-m(x)]^2}{2s^2}\right\}\cdot\left\{1-\frac{[x-m(x)]^2}{s^2}\right\}.$$

Из этого соотношения следует, что в точках $x=m(x)+s$ и $x=m(x)-s$ выполняется соотношение $p''(x)=0$, то есть эти точки являются ординатами точек перегиба кривой $p(x)$, в которых меняется знак кривизны этой функции. Значения плотности вероятности в этих точках одинаковы и равны

$$p(x)\big|_{x=m(x)-s}=p(x)\big|_{x=m(x)+s}=\frac{1}{es\sqrt{2p}}.$$

Здесь $e\approx 2{,}7182$ – основание натурального логарифма.

§ 2.3 Правило «трех сигм». Обнаружение аномальных результатов измерений (грубых погрешностей)

Проведем интегрирование функции плотности распеределения вероятностей $p(x)$ нормального закона распределения в пределах симметричных интервалов относительно точки $x=m(x)$. Обозначим нижний и верхний пределы интегрирования символами $m(x)-e$ и $m(x)+e$. Площадь фигуры, заключенной между кривой $p(x)$ и осью абсцисс, а справа и слева между прямыми, проходящими через точки $x=m(x)-e$ и $x=m(x)+e$ перпендикулярно оси x, определяют вероятность получения при измерениях результата, попадающего в интервал значений $[m(x)-e, m(x)+e]$. Характерное свойство нормального распределения состоит в том, что в интервале $[m(x)-s\,, m(x)+s\,]$ сосредоточено около 68,26% из всех возможных результатов измерений. В интервале $[m(x)-2s\,, m(x)+2s\,]$ – около 95,44%. В интервале $[m(x)-3s\,, m(x)+3s\,]$ – 99,73% из всех возможных результатов измерений (рисунок 2.3). Следовательно, практически все результаты измерений лежат в интервале $\pm 3s$ (по три s в каждую сторону относительно положения $m(x)$). За пределами этого интервала могут находиться лишь 0,27% данных измерений от их общего числа (приблизительно три из тысячи результатов измерений).

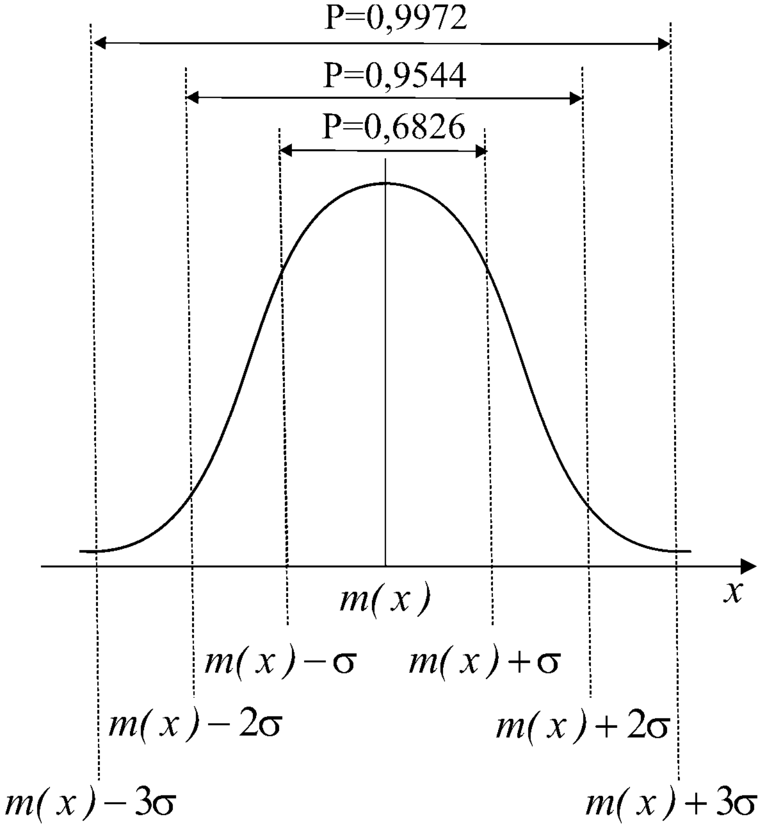


Рис. 2.3. Иллюстрация правила «трех сигм»

Отсюда следует, что если какое-либо значение величины выходит за пределы $\pm 3s$ относительно среднего значения, то с большой вероятностью его можно считать ошибочным.

Правило трех сигм может быть сформулировано следующим образом: если при многократных измерениях ($n > 25...30$) одной и той же величины постоянного размера сомнительный результат x_S отдельного измерения отличается от среднего значения более чем на $3s$, то с вероятностью 99,7% он ошибочен, его отбрасывают и не учитывают при дальнейшей обработке результатов измерений.

Более точный метод обнаружения сомнительных (аномальных) результатов учитывает приближенность оценок среднего арифметического и среднеквадратического отклонения по выборке конечного объема. Метод основан на вычислении величины

$$t = \frac{|x_s - \tilde{x}|}{\tilde{s}},$$

где x_s – контролируемый результат; $\tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ – среднее арифметическое результатов n измерений; $\tilde{s} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{x})^2}$ – среднеквадратическое отклонение результатов измерений относительно $\tilde{x}$.

После чего выбирают ***уровень значимости*** – допустимую для данной задачи вероятность a ошибки отклонить предположение о том, что результат измерений является аномальным. Фактически уровень значимости – это такое (достаточно малое) значение вероятности события, при котором событие уже можно считать неслучайным. Далее в таблице 2.1, содержащей значения a-процентных точек распределения максимальных по модулю отклонений результатов многократных измерений от их среднего значения, найти значение t_{an}, соответствующее выбранному уровню значимости и числу n проведенных измерений. Если $t > t_{an}$, то значение x_s можно отбросить. Вероятность появления правильного результата измерения, для которого $t > t_{an}$, мала и равна принятому уровню значимости. При уменьшении a растет t_{an} и условие $t > t_{an}$ выполняется труднее.

Таблица 2.1. – α-процентные точки распределения – максимальных по модулю отклонений результатов многократных измерений от их среднего значения

Число измерений n	Уровень значимости α, %				
	0,1	0,5	1,0	5,0	10
3	1,414	1,41	1,41	1,41	1,41
4	1,732	1,730	1,728	1,710	1,689
5	1,994	1,982	1,972	1,917	1,869
6	2,212	2,183	2,161	2,067	1,996
7	2,395	2,344	2,310	2,182	2,093
8	2,547	2,476	2,431	2,273	2,172
9	2,677	2,586	2,532	2,349	2,238
10	2,788	2,680	2,616	2,414	2,294
15	3,171	2,997	2,905	2,638	2,494
20	3,400	3,187	3,079	2,779	2,623
25	3,556	3,318	3,200	2,880	2,718
30	3,672	3,416	3,291	2,958	2,792
35	3,762	3,494	3,364	3,022	2,853
40	3,835	3,557	3,424	3,075	2,904
45	3,896	3,610	3,474	3,120	2,948
50	3,948	3,656	3,518	3,160	2,987

Пример. Измерялось расстояние между двумя точками. Проведено 10 измерений. Получены результаты со следующими числовыми значениями: $x_1 = 10{,}07$; $x_2 = 10{,}08$; $x_3 = 10{,}10$; $x_4 = 10{,}12$; $x_5 = 10{,}13$; $x_6 = 10{,}15$; $x_7 = 10{,}16$; $x_8 = 10{,}17$; $x_9 = 10{,}20$; $x_{10} = 10{,}40$. Все результаты имеют размерность $[м]$. Измерение с результатом $x_{10} = 10{,}40$ резко отличается от остальных. Необходимо проверить, нельзя ли отбросить это значение. Воспользуемся приведенным выше критерием $t_{\alpha n}$, хотя, строго говоря, данных для того, чтобы считать результаты измерения удовлетворяющими нормальному распределению, недостаточно. Расчеты дают следующие значения параметров $\tilde{x}$, $\tilde{s}$, t:

$$\tilde{x} = 10{,}16;$$

$$\tilde{s} = 0{,}094;$$

$$t = \frac{10{,}40 - 10{,}16}{0.094} = 2{,}55.$$

Принимаем уровень значимости $a = 1\%$. По таблице 2.1 находим значение t_{an}, соответствующее выбранному уровню значимости и количеству проведенных измерений. Это значение равно $t_{an} = 2{,}616$. Таким образом, $t < t_{an}$. Значение x_{10} отбрасывать нецелесообразно.

Правило трех сигм позволяет также уточнить границы применимости статистической модели, опирающейся на использование нормального закона распределения вероятностей, при обработке результатов геодезических измерений. Формально безоговорочной применимости этой модели противоречит то, что результаты измерения длины не могут приобретать отрицательные значения, а результаты измерения углов, хоть и могут быть отрицательными, обладают регулярной цикличностью с периодом, равным 360°. В этих условиях применимость модели, основанной на нормальном законе распределения, определяется следующим неравенством:

$$m(x) > 3s\ .$$

§ 2.4 Оптимальные оценки измеряемых величин по результатам многократных измерений. Метод максимального правдоподобия

Если имеющиеся данные измерений не противоречат гипотезе о нормальном распределении, то для полной характеристики распределения генеральной совокупности нужно найти оценки для $m(x) = a$ – математического ожидания генеральной совокупности и s – среднеквадратического отклонения генеральной совокупности.

Когда известна функция плотности вероятностей случайной величины, то оценивание ее параметров можно осуществить методом ***максимального правдоподобия***.

Элементарная вероятность получить некоторый результат измерения x_i в интервале $x_i = \pm\Delta x_i / 2$ равна $p_i(x_i, a, s)\Delta x_i$, где $p_i(x_i, a, s)$ – условная плотность распределения вероятности i-ого результата измерений.

Все результаты измерений будем предполагать независимыми. Поэтому вероятность встретить все экспериментально полученные данные измерений при $\Delta x_1 = ... = \Delta x_n$ равна

$$P_i = \prod_{i=1}^{n} p_i(x_i, a, s)\Delta x_1 ... \Delta x_n ,$$

Идея метода состоит в том, что за оценки параметров распределения (в нашем случае это параметры a и s) берут такие значения, которые дают максимум вероятности P_i. Задача решается путем приравнивания к нулю частных производных P_i по оцениваемым параметрам. Постоянные сомножители не влияют на решение, и поэтому рассматривают только произведение функций p_i, которое называется функцией правдоподобия

$$L(x_1,...,x_n;a,s) = \prod_{i=1}^{n} p_i(x_1,...,x_n;a,s).$$

Функция правдоподобия – это совместное распределение выборки $\{x_i\}_1^n$ конечного объема $i = \overline{1,n}$ из параметрического распределения генеральной совокупности, рассматриваемое как функция параметра этого распределения. При этом используется совместная функция плотности вероятности (в случае выборки из непрерывного распределения), вычисленная для данных выборочных значений.

Если распределение вероятности зависит от параметра, то можно рассматривать вероятность появления заданного события (появления соответствующего значения результата измерения) при различных значениях параметра. В этом случае имеем функцию, зависящую от параметра при фиксированном событии. Такая функция и является функцией правдоподобия. Она показывает, насколько правдоподобен выбранный параметр при заданном событии. Правдоподобие позволяет оценивать неизвестные параметры, основанные на известных результатах. Правдоподобие позволяет сравнить несколько вероятностных распределений с разными параметрами и оценить, в рамках какого из них наблюдаемые события наиболее вероятны.

Для имеющейся группы результатов измерений $\{x_i\}_1^n$ в предположении о нормальном законе распределения отдельного результата x_i функция плотности вероятностей будет иметь следующий вид:

$$p_i(x_i, a, s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Следовательно, функция правдоподобия может быть представлена как

$$L = (1/\sqrt{2\pi s^2})^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2}.$$

Для нахождения максимума L удобно исследовать $\ln L$. Известно, что любое монотонное функциональное преобразование не приводит к изменению положения экстремума функции. Логарифмическое преобразование является монотонным. Тогда

$$\ln L = -(n/2)\ln 2p - (n/2)\ln s^2 - (1/2s^2)\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2.$$

Максимум L достигается, если $\partial L/\partial a = 0$ и $\partial L/\partial s^2 = 0$:

$$\partial L/L\partial a = (1/s^2)\sum_{i=1}^{n}(x_i - a) = 0;$$

$$\partial L/L\partial(s^2) = -(n/2s^2) + (1/2s^4)\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^3 = 0.$$

Из первого уравнения находим оптимальную оценку для a:

$$\tilde{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$

а из второго – для s^2:

$$\tilde{s}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2}{n}.$$

Проверим, являются ли полученные оценки состоятельными и несмещенными. Математическое ожидание $m(x_i) = a$, так как все x_i относятся к одному и тому же распределению генеральной совокупности. Поэтому

$$m(a) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m(x_i) = a.$$

Следовательно, $\tilde{a}$ является несмещенной оценкой a. Она является и состоятельной оценкой, так как при $n \to \infty$ $\tilde{a} \to a$ по закону больших чисел.

Можно показать, что полученная оценка для s^2 является состоятельной, но смещенной. Для устранения смещения ее надо исправить как

$$\tilde{s}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2}{n-1}.$$

Эта оценка тоже состоятельная, но, как нетрудно проверить, уже несмещенная. Некоторое отклонение от максимума функции правдоподобия, приводящее к снижению эффективности оценки, считается ***менее существенным***, чем смещенность оценки с максимальной эффективностью.

Таким образом, наилучшей оценкой истинного значения $\tilde{x}$ измеряемой величины по данным многократных измерений при условии нормального закона распределения является ***выборочное среднее арифметическое*** $\tilde{a}$, а оценкой параметра рассеяния результатов, составляющих генеральную совокупность, – ***выборочная дисперсия*** $\tilde{s}^2$.

Целесообразно этот результат, полученный на основе статистического подхода, сравнить с результатом, выявленным в рамках детерминированного подхода с использованием метода наименьших квадратов.

Пусть имеется n результатов измерений величины x. Случайный характер погрешностей приводит к тому, что в каждом отдельном измерении из множества $\{x_i\}_1^n$ погрешность имеет свое собственное значение $e_i \neq e_j$, определяющее соответствующие невязки $n_i = -e_i$, где $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$; $i \neq j$. Тогда связь между результатами отдельных измерений и искомой оценкой $\tilde{x}$ описывается ***фундаментальной*** системой условных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - \tilde{x} = n_1 \\ x_2 - \tilde{x} = n_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i - \tilde{x} = n_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n - \tilde{x} = n_n \end{cases}$$

В соответствии с методом наименьших квадратов оптимальная оценка соответствует условию достижения минимума суммой квадратов невязок системы условных уравнений

$$\tilde{x} = \underset{\tilde{x} \in W_x}{arg\,min} \sum_{i=1}^{n} n_i^2 = \underset{\tilde{x} \in W_x}{arg\,min} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \tilde{x})^2 ,$$

где W_x – область возможных значений величины x.

Положение минимума функции $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \tilde{x})^2$ не изменится, если эту функцию умножить на постоянную величину $(n-1)^{-1}$. Тогда условие достижения минимума суммой квадратов невязок запишется в следующем виде:

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \tilde{x})^2 \to \min .$$

Это условие означает, что оптимальная оценка величины может быть найдена из условия достижения минимума значений выборочной дисперсии, которое эквивалентно условию достижения минимума квадратичным критерием. Решая уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \tilde{x})^2 \right] = 0 ,$$

Получим, что оптимальная оценка в этом случае равна

$$\tilde{x} = \frac{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} x_{\mathrm{i}}}{n} .$$

Таким образом, в случае распределения результатов измерений по нормальному закону максимально правдоподобная оценка полностью совпадает с оценкой, полученной на основе метода наименьших квадратов.

Сохраняется ли вид наилучших (максимально правдоподобных) оценок в случаях, когда закон распределения генеральной совокупности результатов измерений отличается от нормального?

Построим максимально правдоподобную оценку по результатам равноточных измерений, распределенных по логарифмически нормальному закону

$$p(x_i)=\begin{cases}\dfrac{1}{x_i s\sqrt{2p}}\exp[-(\ln x_i-m)^2/2s^2], & x_i>0\\ 0, & x_i\le 0\end{cases};$$

где $s>0; -\infty<m=\ln\tilde{x}<+\infty;\ 0<x_i<+\infty,\ i=1,2,...,n$

В этом случае функция правдоподобия имеет вид

$$L=(1/\sqrt{2p\mathrm{x}_\mathrm{i}^2 s^2})^\mathrm{n}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln\mathrm{x}_\mathrm{i}-\ln\tilde{x})^2}.$$

Для нахождения максимума L удобно исследовать $ln L$:

$$\ln L=-(n/2)\ln 2p-(n/2)\ln s^2-(n/2)\ln x_i^2-(1/2s^2)\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\ln\tilde{x})^2$$

Максимум L достигается, если $\partial(\ln L)/\partial\tilde{x}=0$, то есть

$$\partial L/L\partial\tilde{x}=(1/2s^2)\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\ln\tilde{x})=0.$$

Из данного уравнения следует

$$\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\ln\tilde{x})=0.$$

Преобразование этого выражения с использованием ***основного свойства логарифма*** позволяет получить соотношение $ln(x_1x_2...x_n)^{1/n}=ln\,\tilde{x}$, а далее – после потенцирования – формулу

$$\tilde{x}=\prod_i x_i^{1/n}.$$

Это среднее геометрическое, иногда его называют ***средним логарифмическим***. Ранее эту оценку мы получали путем минимизации критерия $R=\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\ln\tilde{x})^2$.

Определим максимально правдоподобную оценку по результатам измерений, распределенных по закону Лапласа

$$p(x_i)=\frac{a}{2}\exp(-a\,|x_i-\tilde{x}|),$$

где $a>0$ – параметр масштаба; $b=\tilde{x}$ – параметр сдвига $(-\infty<b<+\infty)$; $-\infty<x_i<+\infty$. $s^2=2/a^2$

В этом случае функция правдоподобия имеет вид

$$L=(a/2)^\mathrm{n}\,\mathrm{e}^{-a\sum_{i=1}^{n}|\mathrm{x}_\mathrm{i}-\tilde{x}|}.$$

Для нахождения максимума L удобно исследовать $ln L$:

$$\ln L = n \ln(a/2) - a \sum_{i=1}^{n} |x_i - \tilde{x}|$$

Очевидно, что в этом случае функция $ln L$ не является дифференцируемой по $\tilde{x}$. В точках $x = x_i$ производная этой функции имеет разрывы. Вместе с тем анализ этой функции показывает, что максимум $ln L$, а тем самым и функции правдоподобия, достигается в том случае, если выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - \tilde{x}| \to \min .$$

Данное соотношение определяет и условие минимизации модульного критерия, рассмотренное нами ранее. Тогда же было установлено, что минимуму модульного критерия соответствует оптимальная оценка, совпадающая с ***выборочной медианой***.

Три примера, приведенные выше, показывают, что вид наилучших оценок по результатам многократных измерений существенно зависит от вида закона распределения результатов измерений. Только для результатов многократных измерений, распределенных по нормальному закону, наилучшей оценкой истинного значения измеряемой величины является среднее арифметическое.

§ 2.5 Формирование точечных и интервальных оценок по результатам многократных прямых измерений

При анализе алгоритмов формирования оценок значений физических величин по результатам их многократных измерений будем исходить из следующих обоснованных ранее допущений:

- искомое истинное значение физической величины соответствует значению параметров положения центра функции плотности распределения генеральной совокупности результатов измерения;

- генеральная совокупность результатов измерения распределена по нормальному закону, параметром положения центра которого является математическое ожидание значений генеральной совокупности;

- исходя из любого доступного, но всегда конечного объема эмпирических данных $\{x_i\}_1^n$, $i = \overline{1, n}$, точное определение значения математического ожидания генеральной совокупности невозможно;

- наилучшей оценкой математического ожидания генеральной совокупности, распределенной по нормальному закону, является среднее арифметическое, построенное по совокупности данных выборки $\{x_i\}_1^n$.

Тогда алгоритм формирования оценки $\tilde{x}$ истинного значения измеряемой величины будет отражать следующее соотношение:

$$\tilde{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

При обработке большого объема последовательно получаемых результатов измерений полезна рекуррентная формула расчета среднего арифметического

$$\tilde{x}_{[n]} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} x_i + \frac{x_n}{n} = \frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) + \frac{x_n}{n} = \frac{n-1}{n}\tilde{x}_{[n-1]} + \frac{x_n}{n},$$

где $\tilde{x}_{[n-1]}, \tilde{x}_{[n]}$ – значения среднего арифметического, рассчитанные по результатам $(n-1)$ и n измерений x_i; x_n – значение x_i при $i = n$.

Оценка истинного значения формируется путем вычисления среднего арифметического результатов n повторных измерений и является случайной величиной со своим законом распределения. Чем больше n, тем точнее можно оценить истинное значение.

Мерой точности полученной оценки может служить дисперсия $s_{\tilde{x}}^2$ закона распределения полученной оценки. Если этот закон нормальный, то значение $s_{\tilde{x}}^2$ вполне описывает все статистические свойства погрешности полученной оценки. В противном случае одного значения дисперсии для определения точности оценки в виде выборочного среднего арифметического недостаточно.

Рассмотрим первый случай, когда точность оценки вполне характеризуется значением $s_{\tilde{x}}^2$. Дисперсия выборочного среднего связана с дисперсией s^2 распределения генеральной совокупности, а тем самым с дисперсией любого результата, составляющего генеральную совокупность, соотношением

$$s_{\tilde{x}}^2 = \frac{s^2}{n}.$$

Это соотношение здесь дается без доказательства, но будет обосновано более строго в §3.2.

Так как значение s^2 также неизвестно точно, то целесообразно использовать его несмещенную оценку по совокупности полученных результатов измерений $\{x_i\}_1^n$. Тогда оценка дисперсии среднего арифметического может быть вычислена на основании следующего алгоритма:

$$\tilde{s}_{\tilde{x}}^2 = \frac{\tilde{s}^2}{n} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \tilde{x})^2 ,$$

где $\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$.

В ряде случаев для вычисления оценки дисперсии единичного результата $\tilde{s}^2$ при определении дисперсии $\tilde{s}_{\tilde{x}}^2 = \tilde{s}^2 / n$ среднего арифметического может оказаться полезной формула

$$\tilde{s}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \tilde{x})^2}{n-1} = \frac{n}{(n-1)} \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 / n - \tilde{x}^2 \right] = \frac{n}{(n-1)} \left[(\tilde{x}^{(2)})^2 - \tilde{x}^2 \right],$$

где $\tilde{x}^{(2)} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ – среднее квадратическое результатов измерений.

Оценка дисперсии $\tilde{s}^2$ может быть рассчитана и на основе следующего рекуррентного алгоритма:

$$\tilde{s}_{[n]}^2 = \frac{n-2}{n-1} s_{[n-1]}^2 + \frac{1}{n} (x_n - \tilde{x}_{[n-1]})^2$$

где $\tilde{s}_{[n-1]}^2, \tilde{s}_{[n]}^2$ – оценки дисперсии, рассчитанные по результатам $(n-1)$ и n измерений x_i; $\tilde{x}_{[n-1]}$ – значение среднего арифметического, рассчитанное по результатам $(n-1)$ измерений x_i; x_n – значение x_i при $i = n$.

Из соотношения $\tilde{s}_{\tilde{x}}^2 = \tilde{s}^2 / n$ следует, что однократное измерение $(n = 1)$ обладает погрешностью, которую характеризует дисперсия всей генеральной совокупности. На первый взгляд, здесь содержится противоречие: для оценки погрешности однократного измерения необходимо провести многократные измерения с целью определения значения $\tilde{s}^2$. Однако это противоречие разрешается достаточно просто. Проведение измерений величины x и определение дисперсии генеральной совокупности разделяют во времени и в пространстве. В частности, если предположить, что случайная погрешность измерений обусловлена особенностями применяемого метода и измерительного прибора, то величину s^2 можно определить в процессе калибровки прибора и контролировать в ходе периодических поверок. В определенном смысле с любым результатом измерений x_i всегда связано значение дисперсии генеральной совокупности (или ее оценки). Поэтому результаты измерений, относящиеся к одной генеральной совокупности, то есть полученные в одинаковых условиях с использованием одного и того же измерительного прибора, обладают одинаковой погрешностью, величиной s^2. Такие измерения называют ***равноточными***. Если же измерения одной и той же величины относятся к разным генеральным совокупностям, то есть осуществлены в разных условиях с использованием различных измерительных приборов, то они обладают различными погрешностями (значениями $\tilde{s}^2$). Такие измерения называют ***неравноточными***. Таким образом, каждое единичное измерение характеризуется парой чисел: значением x_i и дисперсией s_i^2 генеральной совокупности, к которой принадлежит это измерение. В случае равноточных измерений все s_i^2 одинаковы. Именно обработка равноточных измерений будет рассмотрена в §2.4.

Когда расчеты значений $\tilde{x}$ и $\tilde{s}_{\tilde{x}}^2$ проведены, то окончательный результат равноточных измерений представляют в виде

$$\tilde{x} \pm \sqrt{\tilde{s}_{\tilde{x}}^2} = \tilde{x} \pm \tilde{s}_{\tilde{x}},$$

где $\tilde{s}_{\tilde{x}} = \sqrt{\dfrac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{x})^2}$ – среднеквадратическое отклонение среднего арифметического $\tilde{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ результатов измерений.

Такую форму представления результатов многократных измерений физической величины называют ***точечной оценкой***.

Данное представление свидетельствует о том, что даже после проведения многократных измерений, точное (истинное) значение измеряемой величины остается неизвестным. Обработка эмпирических данных позволяет определить некоторый интервал значений, в котором истинное значение может оказаться с достаточно большой вероятностью. Центр этого интервала определяет оценка математического ожидания генеральной совокупности, то есть выборочное среднее арифметическое, а границы – значения оценки среднеквадратического отклонения $\tilde{s}_{\tilde{x}}$, отложенные по оси x вправо и влево относительно положения $\tilde{x}$. На рисунке 2.4 схематически представлен такой интервал. Для точечной оценки границы изображенного интервала находятся на расстоянии e от $\tilde{x}$, которое соответствует значению $\tilde{s}_{\tilde{x}}$.

В соответствии со свойствами нормального распределения в интервал $[\tilde{x} - \tilde{s}_{\tilde{x}}, \tilde{x} - \tilde{s}_{\tilde{x}}]$ попадает около 68% всех возможных результатов измерений. С такой же вероятностью такой интервал может «накрыть» истинное значение измеряемой величины. Однако с вероятностью около 32% истинное значение может и не попасть в интервал $[\tilde{x} - \tilde{s}_{\tilde{x}}, \tilde{x} - \tilde{s}_{\tilde{x}}]$. Таким образом, достоверность точечной оценки не превышает 68%.

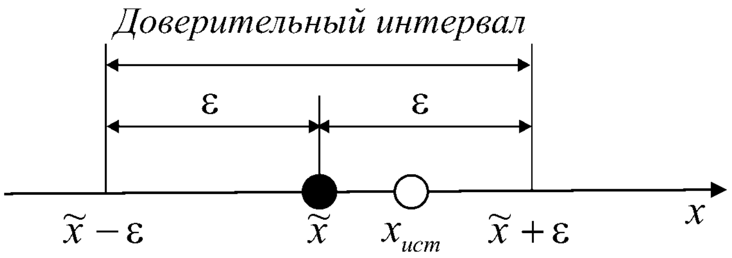


Рис. 2.4. Доверительный интервал

Напомним, что ***достоверность измерений*** (один из показателей качества получаемых результатов) зависит от степени доверия к результату и характеризуется вероятностью того, что истинное значение лежит в указанных ***доверительных границах***.

Интервал определяющий границы доверительной области называют ***доверительным интервалом***, вероятность с которой можно ожидать попадания истинного значения в доверительный интервал – ***доверительной вероятностью***.

Таким образом, точечная оценка представляет собой интервальную оценку с доверительной вероятностью $P \approx 0{,}68$.

Если же достоверность точечной оценки не удовлетворяет, есть два пути повышения качества получаемых результатов.

Первый путь заключается в увеличении числа проведенных измерений. В этом случае уменьшается значение $\tilde{s}_{\tilde{x}}$, что приводит к уменьшению доверительного интервала. Очевидно, что при $n \to \infty$ происходит неограниченное сближение границ доверительного интервала к точке $\tilde{x}$, а само значение $\tilde{x}$ неограниченно приближается к истинному значению измеряемой величины.

Второй путь – в увеличении доверительной вероятности при неизменном количестве измерений. Это достигается путем расширения границ доверительного интервала. Например, использование доверительного интервала $[\tilde{x} - 2\tilde{s}_{\tilde{x}}, \tilde{x} - 2\tilde{s}_{\tilde{x}}]$ позволяет увеличить доверительную вероятность до 95%, интервала $[\tilde{x} - 3\tilde{s}_{\tilde{x}}, \tilde{x} - 3\tilde{s}_{\tilde{x}}]$ – до значения свыше 99%. Оценки с требуемым значением доверительной вероятности получили название ***интервальных оценок***.

При большом числе результатов измерений ($n > 25...30$) доверительную границу случайной погрешности e вычисляют по формуле

$$e = z_P \cdot \tilde{s}_{\tilde{x}},$$

где z_P – ***квантиль*** нормального распределения (квантильный множитель), $\tilde{s}_{\tilde{x}}$ – оценка среднеквадратического отклонения среднего арифметического.

Значение квантильного множителя z_P определяют по таблице функции Лапласа при заданной доверительной вероятности P (таблица 2.2)

Таблица 2.2 – Значения квантилей нормального распределения

Доверительная вероятность	0,80	0,90	0,95	0,99	0,999
z_P	1,28	1,65	1,96	2,58	3,29

Чем меньше число измерений, тем менее надежным является определение доверительного интервала приведенным выше способом.

При небольшом числе результатов измерений ($n < 25...30$) используют не гауссовское распределение, а распределение Стьюдента, и доверительную границу случайной погрешности e рассчитывают по формуле

$$e = t_P \cdot \tilde{s}_{\tilde{x}}$$

где t_P – коэффициент Стьюдента (квантиль распределения Стьюдента), $\tilde{s}_{\tilde{x}}$ – оценка среднеквадратического отклонения среднего арифметического.

Значение коэффициента Стьюдента t_P определяют при заданной доверительной вероятности P для n полученных результатов измерений с использованием данных, приведенных в таблице 2.3.

При увеличении числа измерений ($n > 30$) распределение Стьюдента переходит в нормальное, а коэффициент Стьюдента сближается с квантилем нормального распределения ($n \to \infty$, $t_P \to z_P$).

Анализируя данные таблицы 2.3 можно отметить, что при фиксированном количестве измерений коэффициент Стьюдента растет по мере увеличения требуемой доверительной вероятности, а при фиксированном значении доверительной вероятности – уменьшается с ростом числа измерений.

Таблица 2.3 – Значения коэффициента Стьюдента t_P

n	Доверительная вероятность P				
	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
2	6,31	12,71	31,82	63,68	636,62
3	2,92	4,30	6,97	9,93	31,6
4	2,35	3,18	4,54	5,84	12,92
5	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61
6	2,02	2,57	3,37	4,06	6,87
7	1,94	2,45	3,14	3,71	5,96
8	1,90	2,37	3,00	3,50	5,41
9	1,86	2,31	2,90	3,36	5,04
10	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78
15	1,76	2,15	2,62	2,98	4,14
20	1,73	2,09	2,54	2,86	3,88
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,37
∞	1,65	1,96	2,33	2,58	3,29

Подводя итог сказанному, отметим, что обработка результатов многократных прямых измерений $\{x_i\}_1^n$ некоторой физической величины сводится в общем случае к формированию интервальной оценки, которую определяют три числа:

- значение среднего арифметического результатов измерений

$$\tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,;$$

- значение границы доверительного интервала (границы погрешности)

$$e = t_P\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{x})^2}\,;$$

- значение доверительной вероятности P.

В частном случае формирования точечной оценки значение доверительной вероятности не указывают, а границу погрешности определяют по формуле

$$e = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{x})^2}\,.$$

В любом случае окончательный результат записывают как

$$\tilde{x} \pm e\,.$$

После чего его представляют в ***стандартной форме***, которая содержит только ***достоверные***, то есть правильно округленные, значения этих чисел. Заблуждением было бы полагать, что высокая точность вычислений при обработке данных может способствовать получению более точного результата измерения. Например, в ходе проведения расчетов значений $\tilde{x}$ и e компьютер может выдать с десяток ненулевых цифр, но все ли они будут достоверными? Обработка данных, какой бы сложной и трудоемкой она ни была, является ***вторичной*** по отношению к природе изучаемого объекта и процессу измерения. В окончательных числовых значениях это следует учитывать, что и делают путем их округления.

Необходимость округления есть следствие ***неопределенности*** при оценивании окончательных результатов. В математической статистике доказано, что относительная погрешность оценивания величины $\tilde{s}_{\tilde{x}}$ составляет примерно $1/\sqrt{n-1}$, где n – количество измерений. При $n \sim 10$ относительная погрешность оценивания $\tilde{s}_{\tilde{x}}$ может достигать 30%. Понятно, что тогда теряет смысл приводить в числовом выражении для погрешности лишние цифры, которые окажутся заведомо ненадежными. Правда, при выполнении промежуточных расчетов полезно иметь одну или две дополнительные цифры, которые понадобятся в процессе округления.

Порядок выполнения округления включает следующие этапы.

1. Выполняют предварительную запись окончательного результата измерения в виде $\tilde{x} \pm e$ и выносят за общие скобки одинаковые порядки среднего и погрешности, то есть множитель вида 10^k, где k – целое положительное или отрицательное число. Числа в скобках переписывают в десятичном виде с использованием запятой, убрав тем самым оставшиеся порядковые множители.

2. Округляют в скобках число, соответствующее погрешности:

- до одной значащей (ненулевой) цифры слева, если эта цифра равна или больше 2, например, число 0,03411 округляют до 0,03;

- до двух первых цифр в случае, если первая значащая цифра после запятой в десятичной записи числа – единица, например число 0,00014232 округляют до 0,00014.

При округлении используют следующее правило:

- если цифра, расположенная за оставляемой, меньше 5, то ее отбрасывают, например, число 0,034 округляют до 0,03;

- если больше 5, то оставляемую цифру увеличивают на единицу, например, число 0,037 округляют до 0,04;

- если отбрасываемая цифра равна 5, то наименьшая ошибка достигается при округлении по правилу Гаусса до ближайшего четного числа, например, число 0,45 округляют до 0,4, и число 0,35 также округляют до 0,4.

3. Округляют в скобках число, соответствующее среднему значению $\tilde{x}$: последними справа оставляют цифры тех разрядов, которые сохранились в погрешности после ее округления.

4. Окончательно записывают $\tilde{x} \pm e$ с учетом выполненных округлений. Общий порядок и единицы измерения величины приводят за скобками – получена ***стандартная форма*** записи.

Пример округления и записи окончательного результата измерений в стандартной форме приведен в таблице 2.4.

Таблица 2.4 – Запись окончательного результата измерения

Предварительная запись	Стандартная форма записи
$L = (5281{,}12 \pm 5{,}4)$ м	$L = (5{,}281 \pm 0{,}005) \cdot 10^3$ м

В заключение рассмотрим пример обработки результатов многократных прямых измерений высоты h. Данные измерений помещены в таблице 2.5. Отметим, что измерения проводили с помощью обычной мерной ленты (рулетки) в условиях порывистого ветра, что привело к значительному разбросу результатов, как из-за растягивания ленты, так и вследствие влияния порывов ветра. Получившийся разброс хорошо заметен в таблице.

Таблица 2.5 – Результаты измерения высоты

Номер измерения, $i = \overline{1, 10}$	h_i, м	$\Delta h_i = h_i - \tilde{h}$, м	$(\Delta h_i)^2$, м**2**
1	28,30	-0,55	0,303
2	29,38	+0,53	0,281
3	28,60	-0,25	0,063
4	28,95	+0,10	0,010
5	29,90	+1,05	1,103
6	28,71	-0,14	0,020
7	28,17	-0,68	0,462
8	29,50	+0,65	0,423
9	28,66	-0,19	0,036
10	28,33	-0,52	0,270

Вычисляют среднее арифметическое $\tilde{h} = \dfrac{\sum_{i=1}^{10} h_i}{10} = 28{,}85$ м и заполняют два правых столбца таблицы. Находят среднее квадратичное отклонение $s_h = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{10} (\Delta h_i)^2}{10 \cdot 9}} = \sqrt{2{,}971/90} = 0{,}18$ м.

Коэффициент Стьюдента для доверительной вероятности $P = 0{,}68$ и $n = 10$ выполненных измерений: $t_{0,68;10} = 1{,}1$. Ширина доверительного интервала, которая служит оценкой случайной погрешности: $e = 1{,}1 \cdot 0{,}18 = 0{,}20$ м. Приборную погрешность при измерении длины оценивают как половину цены деления используемой мерной ленты (0,5 см), она составляет $\sigma_{инс}$ = 0,25 см = = 0,00025 см. Это почти в 100 раз меньше случайной погрешности, и $\sigma_{инс}$ можно не учитывать при вычислении суммарной погрешности измерения.

Окончательный результат измерения высоты: h = (28,85 ± 0,20) м.

§ 2.6 Оценка точности результатов измерений в присутствии систематических погрешностей. Суммарная погрешность

Приведенные в §2.5 процедуры обработки результатов многократных измерений относятся к случаю, когда погрешности полученных результатов являются случайными. Часто помимо случайных на результаты измерений влияют и систематические погрешности. В геодезической практике систематические погрешности обычно связаны с несовершенством измерительных приборов, то есть носят инструментальный характер.

Особенностью систематических погрешностей является то, что они остаются постоянными или закономерно изменяются при повторных измерениях одной и той же физической величины. По характеру проявления систематические погрешности разделяют на ***постоянные*** и ***переменные*** (изменяющиеся во времени). Переменные погрешности могут быть ***прогрессирующими*** и ***периодическими***.

Результаты измерений, полученные при наличии систематических погрешностей, называются ***неисправленными***. Так как систематические погрешности являются детерминированными величинами, то, в принципе, могут быть определены и исключены из результатов измерений. Для исправления результатов их складывают с поправками, равными систематическим погрешностям по величине и обратными им по знаку. Способы определения значений нужных поправок различны и носят специфический характер для каждого типа систематических погрешностей. После исключения систематических погрешностей получают исправленные средние арифметические и исправленные отклонения результатов, характеризующие степень рассеивания результатов. Следует отметить, что введением поправки устраняют влияние только одной вполне определенной составляющей систематической погрешности. Поэтому в результаты измерения часто приходится вводить большое число поправок. При этом вследствие ограниченной точности определения значений поправок накапливаются дополнительные случайные погрешности и дисперсия $\tilde{s}^2_{\tilde{x}_{исп}}$ результата измерения увеличивается:

$$\tilde{s}^2_{\tilde{x}_{исп}} = \tilde{s}^2_{\tilde{x}} + \sum_{j=1}^{m} s_j^2 ,$$

где $\tilde{s}^2_{\tilde{x}}$ – оценка дисперсии неисправленного результата; s_j^2 – оценка дисперсии j – ой поправки.

Поправку имеет смысл вводить до тех пор, пока она уменьшает доверительные границы погрешности. При малой дисперсии поправки может показаться, что введение любой поправки повышает достоверность результата. Однако следует помнить, что погрешность результата выражается не более чем двумя значащими цифрами, поэтому поправка, если она меньше пяти единиц разряда, следующего за последним десятичным знаком погрешности результата, будет все равно потеряна при округлении, и вводить ее не имеет смысла.

Систематические погрешности, оставшиеся после введения соответствующих поправок, называют ***неисключенными*** остатками систематических погрешностей. Эти составляющие систематической погрешности имеют свои значения, но эти значения неизвестны. Известно лишь то, что в массе однотипных измерений эти составляющие лежат в определенных границах $\pm q_{k_{\max}}$. В этом случае для неисключенных остатков систематической погрешности следует принять равномерное распределение. Границы погрешности, соответствующие доверительной вероятности P, вычисляют по формуле

$$q\big|_P = \pm k \sqrt{\sum_{j=1}^{m} q_j^2} ,$$

где q_j – граница j-ой неисключенной систематической погрешности; k – коэффициент, зависящий от доверительной вероятности (для \ $m > 4$ коэффициент $k = 0{,}95$ при $P = 0{,}9$; $k = 1{,}1$ при $P = 0{,}95$ и $k = 1{,}4$ при $P = 0{,}99$).

При числе суммируемых составляющих систематической погрешности $m \leq 4$ коэффициент k находят по таблице 2.5 или (для доверительной вероятности $P = 0{,}99$) с использованием графика, представленного на рисунке 2.5. На графике приведены зависимости $k = k(m,l)$, где l – параметр, учитывающий различие в размерах границ суммируемых погрешностей. При $m \leq 3$ целесообразно сравнивать результат, полученный с помощью формулы $q\big|_P = \pm k\sqrt{\sum_{j=1}^{m} q_j^2}$, с оценкой границ по формуле

$$q^* = \sum_{j=1}^{m} |q_j|.$$

Если $\theta^* > \theta$, то в качестве оценки границ используют θ^*, которая определяет границы при $P = 1$.

Пример. Пусть границы четырех составляющих неисключенных систематических погрешностей $q_1 = \pm 0{,}01$, $q_2 = \pm 0{,}02$, $q_3 = \pm 0{,}03$, $q_4 = \pm 0{,}04$. Необходимо определить доверительные границы композиции этих составляющих погрешностей при $P = 1{,}0$. Применяя предложенную выше методику, получим

$$q = \pm k\sqrt{\sum_{j=1}^{m} q_j^2} = \pm 1{,}4\sqrt{0{,}01^2 + 0{,}02^2 + 0{,}03^2 + 0{,}04^2} \approx \pm 0{,}077.$$

Окончательный результат многократных измерений содержит в себе как случайную, так и неисключенную систематическую погрешности.

Таблица 2.6 – Значения коэффициента $k = k(m,l)$ для вычисления доверительной границы систематической погрешности по формуле $q\big|_P = \pm k\sqrt{\sum_{j=1}^{m} q_j^2}$

l	$P = 0{,}9$			$P = 0{,}95$			$P = 0{,}98$		
	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
1	0,967	0,958	0,946	1,101	1,120	1,120	1,218	1,283	1,301
2	0,942	0,945	0,945	1,054	1,086	1,096	1,161	1,230	1,263
3	0,918	0,926	0,935	1,019	1,046	1,062	1,108	1,167	1,200
4	0,906	0,912	0,918	0,996	1,017	1,032	1,070	1,121	1,151
5	0,900	0,905	0,911	0,982	0,997	1,012	1,054	1,089	1,118

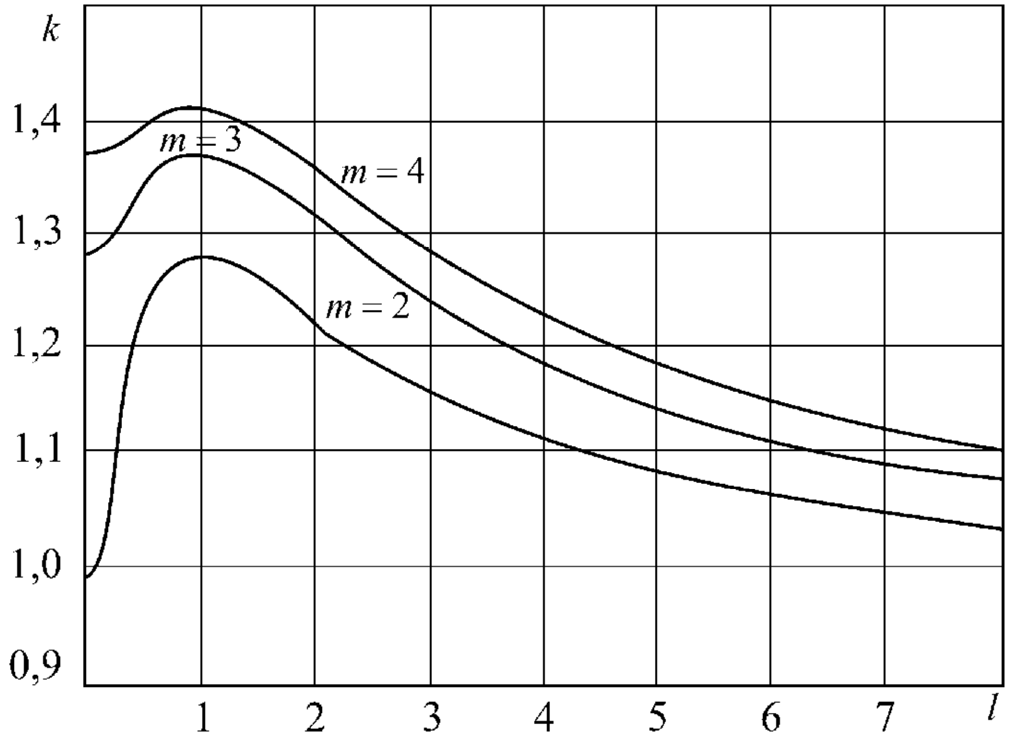


Рис. 2.5. График для определения $k = k(m,l)$ при $P = 0{,}99$

Тогда погрешность окончательного результаты (средне-квадратическое отклонение среднего арифметического) будет включать две составляющие

$$\tilde{s}_{\tilde{x}} = \sqrt{\tilde{s}_{\tilde{x}}^2 + \frac{q^2}{3}}\,.$$

Такую погрешность называют ***суммарной***.

Контрольные вопросы и задания

1. Как определяют понятия «состоятельной», «несмещенной» и «эффективной» оценок?

2. Какими основными предположениями обычно руководствуются при анализе погрешностей геодезических измерений? На чем они основываются?

3. Запишите аналитическое выражение для плотности вероятности случайной величины, распределенной по нормальному закону. Какими основными свойствами обладает это распределение?

4. Сформулируйте правило «трех сигм». На чем оно основано, как применяется на практике?

5. В чем заключается сущность метода максимального правдоподобия? Дайте определение понятию «функция правдоподобия». Как при решении задач обработки результатов многократных прямых измерений соотносятся методы максимального правдобододобия и наименьших квадратов?

6. Охарактеризуйте основные этапы формирования точечной оценки по результатам многократных прямых измерений физической величины. Запишите аналитические выражения для расчета среднего арифметического и дисперсии среднего арифметического.

7. Как формируется интервальная оценка? В чем сходство и различие интервальной и точечной оценок? Что такое доверительная вероятность?

8. Как представить результат измерения в стандартной форме? Каковы основные правила округления результатов измерений?

9. Постройте точечную оценку по результатам измерений величины x. Запишите результат в стандартной форме.

В результате измерений были получены следующие значения величины x:

Вариант 1: 7,08; 7,37; 6,89; 7,24; 7,19.

Вариант 2: 6,07; 6,45; 6,89; 6,34; 7,01.

Вариант 3: 4,11; 4,31; 4,83; 4,28; 4,29.

Вариант 4: 9,02; 9,25; 8,99; 9,44; 9,15.

10. По результатам измерений величины x постройте интервальную оценку для доверительной вероятности 0,98. Запишите результат в стандартной форме.

В результате измерений были получены следующие значения величины x:

Вариант 1: 1,08; 1,37; 1,49; 1,24; 1,19.

Вариант 2: 5,07; 5,45; 5,89; 5,34; 5,01.

Вариант 3: 6,13; 6,31; 6,63; 6,28; 6,29.

Вариант 4: 2,03; 2,33; 2,19; 2,22; 2,15.

11. Как формируется оценка точности результата измерений в присутствии систематических погрешностей? Что такое «суммарная погрешность»?

Список литературы к главе 2

1. Ананченко В.Н. Теория измерений: учебное пособие / В.Н. Ананченко, Л.А. Гофман. – Ростов н/Д : Издательский центр ДГТУ, 2002. – 214 с.

2. Большаков В.Д. Теория ошибок наблюдений: учебник для вузов / В. Д. Большаков. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1983. – 223 с.

3. Большев Л.Н. Таблицы математической статистики / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов. – М.: Наука, 1983. – 416 с.

4. Гайдышев И.П. Анализ и обработка данных : специальный справочник / И.П. Гайдышев – СПб.: Питер, 2001. – 752 с.

5. Куштин И.Ф. Геодещия: обработка результатов измерений: учебное пособие / И.Ф. Куштин. – М.: ИКЦ «МарТ», 2006. – 288 с.

6. Рабинович С.Г. Погрешности измерений / С.Г. Рабинович. – Л.: Энергия, 1978. – 262 с.

7. Фомин А.Ф. Отбраковка аномальных результатов измерений / А.Ф. Фомин, О.Н. Новоселов, А.В. Плющев. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 200 с.

8. Berendsen H.J. A student’s guide to data and error analysis. – New York: Cambridge University Press, 2011. – 225 p.

Глава 3
Обработка результатов косвенных измерений

В геодезической практике часто имеют дело не с величинами, измеренными непосредственно, то есть методом прямых измерений, а с их функциями, то есть величинами, значения которых получены в процессе косвенных измерений.

Так, уклон линии определяют как отношение непосредственно измеренных превышения и длины линии. Длину линии, недоступную для непосредственного измерения, находят из решения треугольника с использованием данных о непосредственно измеренной базисной стороне и горизонтальных углах. Площадь земельного участка прямоугольной формы вычисляют как произведение непосредственно измеренных длины и ширины участка. Перечень подобных примеров можно продолжить. Поэтому возникает задача обработки косвенных измерений, в первую очередь, определения погрешности функции величин, измеренных прямым методом, по результатам оценки среднеквадратической погрешности многократных прямых измерений величин-аргументов или данных об известных среднеквадратических отклонениях генеральных совокупностей результатов измерений величин-аргументов.

§ 3.1 Погрешность функции одной переменной

Пусть задана непрерывная и дифференцируемая функция $y = f(x)$. Рассмотрим прямую задачу, когда по результатам измерения величины x вычисляется значение связанной с ней величины y. Примером может служить вычисление значения тригонометрической функции, соответствующее измеренному значению угла. В этом случае оценка значения функции вычисляется как $\tilde{y} = f(\tilde{x})$. При этом возникает вопрос, как связаны значения дисперсий полученных оценок, если известно значение s_x^2?

Рассмотрим схему, представленную на рисунке 3.1. Очевидно, что только в том случае, когда значение аргумента x известно точно, возможно однозначное отображение $x \to y$. Функциональное преобразование $y = f(x)$ приводит к отображению значения аргумента x_0 в значение функции y_0. Если значение аргумента изменится на величину погрешности Δx, то новому значению аргумента $x_0 + Dx$ будет соответствовать изменившееся значение функции $y_0 + Dy$, где Dy – погрешность определения функции.

Определим связь Δy и Δx.

Для этого используем известную из курса математического анализа ***теорему Тейлора***.

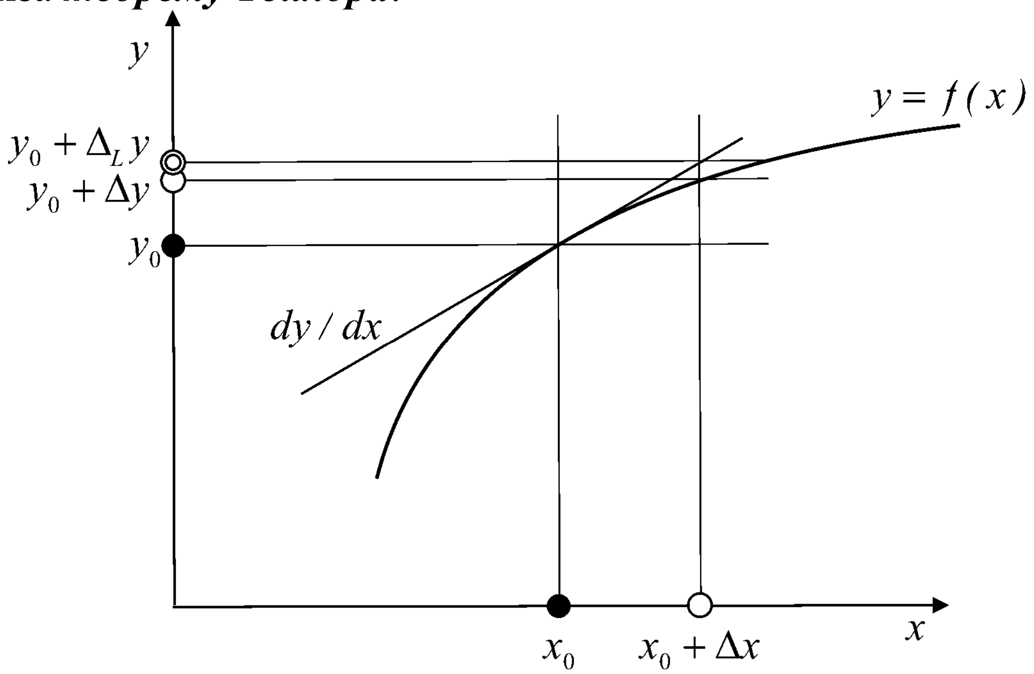


Рис. 3.1. Связь погрешности функции $y = f(x)$ с погрешностью аргумента

Согласно этой теореме значение непрерывной дифференцируемой функции $y = f(x)$ в окрестности фиксированного значения аргумента x_0 может быть представлено в виде бесконечного ряда Тейлора следующего вида:

$$y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)\big|_{x=x_0}}{k!} (\Delta x)^k ,$$

где $f^{(k)}(x)\big|_{x=x_0}$ – k-ая производная функции y в точке $x = x_0$, $k = \overline{1, \infty}$; $k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$.

Предполагая, что погрешность Dx мала, и поэтому пренебрегая вкладом в результат всех членов разложения функции в ряд Тейлора, кроме первого (линейного), получим соотношение

$$y_0 + \Delta y = y_0 + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \cdot \Delta x$$

Откуда следует, что

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x .$$

Если предположить, что погрешность измерения величины x является случайной величиной, распределенной по нормальному закону, то полученное соотношение позволяет связать дисперсии аргумента и функции. Эти дисперсии используются в качестве мер соответствующих случайных погрешностей. Очевидно, что

$$(\Delta y)^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \cdot (\Delta x)^2 .$$

Применяя к правой и левой части этого равенства операцию определения математического ожидания, известную из курса теории вероятностей, получим

$$m[(\Delta Y)^2] = s_y^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \cdot m[(\Delta x)^2] = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 s_x^2$$

Таким образом, дисперсия функции равна произведению дисперсии аргумента на квадрат первой производной этой функции:

$$s_y^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 s_x^2 .$$

Это же соотношение используют и в том случае, если погрешность характеризуется не точным значением дисперсии s_x^2 генеральной совокупности, а ее оценкой $\tilde{s}_{\tilde{x}}^2$, сформированной по результатам конечного числа измерений.

Рассмотренный подход к определению связи между погрешностями аргумента и функции, основан на том, что в малой окрестности точки x_0 реальная нелинейная зависимость $y = f(x)$ заменяется линейной зависимостью. Тангенс угла наклона этой прямой относительно оси x равен первой производной dy/dx в точке x_0. Указанная окрестность должна быть настолько малой, что $y_0 + Dy \approx y_0 + D_L y$ (см. рисунок 3.1). Очевидно, что возрастание погрешности измерения аргумента x приводит к тому, что соотношение $s_y^2 = (dy/dx)^2 s_x^2$ перестает правильно отражать значение дисперсии функции y. Причиной этого является, прежде всего, изменение вида закона распределения случайной величины при ее нелинейном преобразовании. Известно, если случайная величина x связана со случайной величиной y нелинейным преобразованием (функцией) $x = w(y)$, где $w = f^{-1}$ – функция, обратная $y = f(x)$, и известна плотность распределения вероятности $p(x)$, то плотность распределения вероятности $p(y)$ определяется как

$$p(y) = p(x) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|.$$

Если предположить (как обычно), что аргумент x распределен по нормальному закону

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2ps^2}} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2s^2}\right],$$

а аргумент и функция связаны степенной зависимостью $x = y^k$, тогда $dx/dy = ky^{k-1}$, а плотность распределения вероятности величины y преобразуется к виду

$$p(y) = \frac{|k| y^{k-1}}{\sqrt{2ps^2}} \exp\left[-\frac{(y^k - \bar{y}^k)^2}{2s^2}\right].$$

При линейном преобразовании, когда $k = 1$, вид закона распределения не меняется. Поэтому линеаризация функциональной зависимости $y = f(x)$ путем ее замены первой производной в окрестности точки x_0 приводит к тому, что не только аргумент, но и функция распределены по нормальному закону.

§ 3.2 Погрешность функции нескольких переменных

Пусть физическая величина $h = f(z_1, z_2, ..., z_n)$ является функцией n величин $z_1, z_2, ..., ..., z_i, ..., z_n$, каждая из которых измерена непосредственно (методом прямых измерений с погрешностью, характеризуемой дисперсией $s_{z_i}^2$, где $i = \overline{1, n}$). Предположим, что каждый из аргументов функции $f(z_1, z_2, ..., z_n)$ изменился на малую величину $Dz_i << z_i$. Значение функции в этом случае также изменится:

$$h + \Delta h = f(z_1 + \Delta z_1, z_2 + \Delta z_2, ..., z_n + \Delta z_n).$$

Разложим эту функцию в многомерный ряд Тейлора, ограничиваясь в силу малости значений Δz_i линейными членами разложения:

$$h + \Delta h = f(z_1, z_2, ..., z_n) + \frac{\partial f}{\partial z_1}\Delta z_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2}\Delta z_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial z_n}\Delta z_n =$$

$$= f(z_1, z_2, ..., z_n) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_i}\Delta z_i.$$

Откуда

$$\Delta h = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_i}\Delta z_i.$$

Возводя правую и левую части равенства в квадрат и применяя к обеим частям операцию математического ожидания, получим

$$m\left[(\Delta h)^2\right] = m\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_i}\Delta z_i\right)^2\right] =$$

$$= m\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial z_i}\right)^2(\Delta z_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, j\neq i}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_i}\frac{\partial f}{\partial z_j}\Delta z_i\Delta z_j\right] =$$

$$= m\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial z_i}\right)^2(\Delta z_i)^2\right] + 2m\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, j\neq i}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_i}\frac{\partial f}{\partial z_j}\Delta z_i\Delta z_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial z_i}\right)^2 m\left[(\Delta z_i)^2\right] + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, j\neq i}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_i}\frac{\partial f}{\partial z_j}m(\Delta z_i)m(\Delta z_j),$$

где $m(\bullet)$ – операция определения математического ожидания. Например, для величины h эта операция имеет вид

$$m(h) = \int_{\Omega_h} hp(h)dh,$$

$p(h)$ – плотность распределения вероятности величины h; Ω_h – область возможных значений величины h. Тогда

$$m[(\Delta h)^2] = \int_{\Omega_h} [h - m(h)]^2 h(h)dh = s_h^2;$$

$$m[(\Delta x)^2] = \int_{\Omega_x} [x - m(x)]^2 p(x)dx = s_x^2;$$

$$m(\Delta x) = \int_{\Omega_x} [x - m(x)]p(x)dx = \int_{\Omega_x} xp(x)dx - m(x) = m(x) - m(x) = 0.$$

Окончательное выражение имеет вид

$$s_h^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} \right)^2 s_{z_i}^2.$$

Если использовать в качестве меры погрешности измерения величины h величину среднеквадратического отклонения, то

$$s_h = \sqrt{s_h^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} \right)^2 s_{z_i}^2}.$$

Это выражение имеет общий характер, и его можно использовать для оценивания погрешности косвенного измерения, выполненного при любом виде функции $h = f(z_1, z_2, ..., z_n)$. При этом вместо точных значений s_{x_i} могут использоваться их приближенные значения $s'_{x_i} = t_P \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \tilde{x}_i)^2} = t_P \tilde{s}_{x_i} / \sqrt{n}$. Однако следует помнить, что при непосредственных расчетах необходимо подставлять погрешности $\tilde{s}'_{x_i}$, найденные для одного и того же значения доверительной вероятности. Погрешность косвенного измерения величины h также будет соответствовать этому значению доверительной вероятности. Чаще всего используют значение доверительной вероятности, равное 0,68. То есть при определении погрешности косвенных измерений учитывают точечные оценки величин-аргументов. Как и в случае определения погрешности функции одной переменной следует помнить, что полученное соотношение для определения погрешности функции нескольких переменных справедливо при малых значениях погрешностей аргументов.

Заметим, что полученные соотношения для определения дисперсии и среднеквадратического отклонения функции нескольких аргументов справедливы в случае, когда результаты измерения величин $z_1, z_2, ..., z_n$ независимы. Иногда это условие не выполняется. Статистическую связь переменных $z_1, z_2, ..., z_n$ определяет ковариационная матрица

$$\|R_{ij}\| = \begin{bmatrix} s_{z_1}^2 & k_{12} s_{z_1} s_{z_2} & \dots & k_{1n} s_{z_1} s_{z_n} \\ k_{21} s_{z_1} s_{z_2} & s_{z_2}^2 & \dots & k_{2n} s_{z_2} s_{z_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} s_{z_1} s_{z_n} & k_{n2} s_{z_2} s_{z_n} & \dots & s_{z_n}^2 \end{bmatrix},$$

где $s_{z_1}^2,\ s_{z_2}^2, \ldots, s_{z_n}^2$ – дисперсии результатов измерений величин $z_1, z_2, ..., z_n$ $(i, j = 1,\ 2, ...,\ n)$; $k_{ij} = k_{ji}$ – коэффициенты ***корреляции*** результатов измерений для каждой пары ***i***-ой и ***j***-ой величин, отражающие степень их взаимосвязи ($-1 \le k_{ij} \le 1;\ k_{ii} = k_{jj} = 1;\ k_{ij} = 0$ – для результатов независимых измерений).

В случае зависимых погрешностей формула для определения дисперсии функции переменных $z_1, z_2, ..., z_n$ принимает вид

$$s_h^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} \right)^2 s_{z_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,\, i \ne j}^{n} k_{ij} \frac{\partial f \partial f}{\partial z_i \partial z_j} s_{z_i} s_{z_j}.$$

Пример зависимых величин в практике геодезических измерений дают измерения смежных углов способом круговых приемов. В самом деле, если уменьшается измеренное значение угла b, то неизбежно увеличивается измеренное значение смежного ему угла и наоборот. Данное обстоятельство порождает отрицательную статистическую связь с коэффициентом корреляции $k = -0{,}5$.

В дальнейшем однако будет предполагаться, что аргументы соответствующих функций при косвенных измерениях являются независимыми переменными.

Рассмотрим несколько характерных примеров для частных случаев функции $h = f(z_1, z_2, ..., z_n)$, часто встречающихся на практике.

§ 3.3 Применение методики оценивания погрешности функции нескольких переменных при решении частных задач

3.3.1 Расчет погрешности аддитивной функции.

Пусть функция h является аддитивной функцией трех аргументов x,y,z, измеренных с погрешностями, имеющими дисперсии s_x^2, s_y^2, s_z^2:

$$h = \pm ax \pm by \pm cz,$$

где a,b,c – постоянные коэффициенты.

Тогда

$$s_h^2 = (\partial h/\partial x)^2 s_x^2 + (\partial h/\partial y)^2 s_y^2 + (\partial h/\partial z)^2 s_z^2 = a^2 s_x^2 + b^2 s_y^2 + c^2 s_z^2.$$

В случае произвольного числа n аргументов x_i, $i = \overline{1,n}$ аддитивной функции $h = \sum_{i=1}^{n} (\pm a_i) x_i$, где a_i – постоянный коэффициент при переменной x_i, аналогичное соотношение имеет вид

$$s_h^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 s_{x_i}^2,$$

где $s_{x_i}^2$ – дисперсия погрешности изменения x_i.

Часто встречается ситуация, когда все коэффициенты слагаемых аддитивной функции $a_i = 1$. В этом случае формула для расчета дисперсии функции h имеет вид

$$s_h^2 = \sum_{i=1}^{n} s_{x_i}^2,$$

то есть дисперсия суммы слагаемых равна сумме дисперсий слагаемых.

Важно отметить, что вне зависимости от знака перед отдельными слагаемыми аддитивной функции частые составляющие погрешности всегда складываются.

Следует обратить внимание на то, что линейный (в данном случае) характер функции h позволяет снять ограничения на величину s_x^2, s_y^2, s_z^2. Формула для дисперсии линейной функции s_h^2 справедлива для любых значений дисперсий аргументов.

Рассмотрим частный случай линейной функции h, когда она является средним арифметическим величин $\{x_i\}_1^n$, то есть

$$h = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \sum_{i=1}^{n} (n^{-1}) x_i .$$

Учитывая, что в этом случае все x_i принадлежат к одной генеральной совокупности и обладают одинаковой дисперсией $s_{x_i}^2 = s^2$, получим следующее соотношение:

$$s_h^2 = \sum_{i=1}^{n} (\partial h / \partial x_i)^2 s_{x_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} (n^{-1})^2 s^2 = (n^{-1})^2 s^2 \sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{n}{n^2} s^2 = \frac{s^2}{n}.$$

Именно это выражение для определения дисперсии среднего арифметического было использовано в §2.5 при формировании точечной и интервальной оценок результатов многократных измерений.

Важно отметить, что дисперсия среднего арифметического ряда $\{x_i\}_1^n$ слагаемых в n раз меньше дисперсии суммы этих слагаемых.

3.3.2 Расчет погрешности мультипликативной функции

Пусть теперь функция h является мультипликативной функцией аргументов x, y, z, измеренных с погрешностями, имеющими дисперсии s_x^2, s_y^2, s_z^2:

$$h = \pm a x^{\pm a} y^{\pm b} z^{\pm g} ,$$

где $\pm a, \pm b, \pm g$ – постоянные показатели степени частных сомножителей функции.

Тогда

$$s_h^2 = (\partial h / \partial x)^2 s_x^2 + (\partial h / \partial y)^2 s_y^2 + (\partial h / \partial z)^2 s_z^2 =$$
$$= (a a x^{\pm a - 1} y^{\pm b} z^{\pm g})^2 s_x^2 + (a b x^{\pm a} y^{\pm b - 1} z^{\pm g})^2 s_y^2 + (a g x^{\pm a} y^{\pm b} z^{\pm g - 1})^2 s_z^2 .$$

Разделим правую и левую части выражения на $h^2 = (a x^{\pm a} y^{\pm b} z^{\pm g})^2$, получим

$$s_h^2 / h^2 = a^2 s_x^2 / x^2 + b^2 s_y^2 / y^2 + g^2 s_z^2 / z^2 .$$

Если ввести относительные значения дисперсий $d_h^2 = s_h^2 / h^2$, $d_x^2 = s_x^2 / x^2$, $d_y^2 = s_y^2 / y^2$. $d_z^2 = s_z^2 / z^2$, выражение для оценки погрешности мультипликативной функции приобретет простой вид

$$d_h^2 = a^2 d_x^2 + b^2 d_y^2 + g^2 d_z^2 .$$

Мультипликативной функции произвольного вида $h = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\pm a_i}$, где $a_i = \left| \pm a_i \right|$ – модуль показателя степени аргумента x_i, аналогичное соотношение имеет вид

$$d_h^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 d_{x_i}^2 ,$$

где $d_{x_i}^2 = \dfrac{s_{x_i}^2}{x_i^2}$ – относительная дисперсия погрешности изменения x_i.

Для мультипликативной функции относительная дисперсия погрешности равна сумме дисперсий относительных погрешностей сомножителей с коэффициентами, равными квадрату показателя степени соответствующего аргумента.

Для частного случая мультипликативной функции, когда все значения показателей степени сомножителей $\pm a_i = 1$, формула для расчета относительной дисперсии функции имеет вид

$$d_h^2 = \sum_{i=1}^{n} d_{x_i}^2 .$$

Этот результат полезно сравнить с результатом определения дисперсии оценки в виде среднего геометрического, сформированной по совокупности результатов измерений $\{x_i\}_1^n$, то есть мультипликативной функции h вида

$$h = \prod_{i=1}^{n} x_i^{1/n} .$$

Получим следующее соотношение:

$$d_h^2 = n^{-2} \sum_{i=1}^{n} d_{x_i}^2 .$$

Таким образом, относительная дисперсия произведения ряда $\{x_i\}_1^n$ сомножителей в n^2 раз больше относительной дисперсии среднего геометрического этих сомножителей.

Учитывая, что среднее геометрическое и среднее арифметическое часто используются в качестве оценок измеряемой величины по данным измерений $\{x_i\}_1^n$, целесообразно установить, какая из этих оценок обладает меньшей дисперсией. Рассмотрим соотношение $d_h^2 = n^{-2}\sum_{i=1}^{n} d_{x_i}^2$. Учтем, что все $d_{x_i}^2 = s_x^2 / x_i^2$ имеют одинаковый числитель s_x^2, а отличаются только знаменателем. Поэтому символ s_x^2 может быть вынесен за знак суммы:

$$d_h^2 = \frac{s_x^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}.$$

Известно, что $\tilde{x}^{(-2)} = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{-2}}{n}\right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-2}}}$ является средним степенным с показателем степени, равным -2. Учтем также, что

$$h = \prod_{i=1}^{n} x_i^{1/n} = \lim_{k\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{n}\right)^{1/k} = \tilde{x}^{(0)},$$

то есть среднее геометрическое является средним степенным с показателем степени, равным нулю. Тогда

$$s_h^2 = d_h^2 h^2 = \frac{s_x^2}{n}\cdot\left[\frac{\tilde{x}^{(0)}}{\tilde{x}^{(-2)}}\right]^2$$

Полученное выражение позволяет сравнить дисперсии среднего геометрического и среднего арифметического. С учетом того, что для общей совокупности ненулевых результатов измерений $\{x_i\}_1^n$, всегда выполняется неравенство

$$\tilde{x}^{(-2)} < \tilde{x}^{(0)},$$

можно утверждать, что дисперсия среднего арифметического всегда меньше, чем дисперсия среднего геометрического.

3.3.3 Расчет допустимой невязки теодолитного хода

Данный пример демонстрирует возможность применения приемов обработки косвенных измерений в практике геодезических измерений. Будем полагать, что все углы b_i теодолитного хода измерены техническим теодолитом. Измерения считаем равноточными. Среднеквадратическая погрешность измерения всех углов одинакова $s_{b_i} = s_b$. Примем, что $s_b = 30''$.

Определим угловую невязку теодолитного хода n_{Sb} как разность сумм измеренных значений углов b_i и их истинных (теоретических) значений $\tilde{b}_i$, определяемую по формуле

$$n_{\Sigma b} = \sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_i .$$

В этом выражении b_i рассматриваются как независимые переменные, а величина $\sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_i = const$.

Находим частные производные функции n_{Sb} по переменным b_i:

$$\frac{\partial n_{Sb}}{\partial b_1} = \frac{\partial n_{Sb}}{\partial b_2} = \ldots = \frac{\partial n_{Sb}}{\partial b_n} = 1.$$

Используя выражение для дисперсии аддитивной функции, получим

$$s^2_{n_{Sb}} = \sum_{i=1}^{n} s^2_{b_i} = \sum_{i=1}^{n} s^2_{b} = s^2_{b} \sum_{i=1}^{n} 1 = n s^2_{b} .$$

Тогда

$$s_{n_{Sb}} = \sqrt{n s^2_{b}} = s^2_{b} \sqrt{n} .$$

В качестве значения предельной невязки используем интервал значений результатов измерений, распределенных по нормальному закону относительно среднего, появление любого значения в котором происходит с вероятностью не менее 0,95. Следовательно

$$n_{Sb} = 2 s_{n_{Sb}} = 2 s_{b} \sqrt{n} .$$

Если подставить в это выражение численное значение среднеквадратической погрешности теодолитного измерения, то получим предельное значение невязки теодолитного хода в зависимости от числа измеренных углов

$$n_{\Sigma b} = 1' \cdot \sqrt{n} .$$

Таким образом, получена часто используемая в геодезии формула предельно допустимой угловой невязки.

3.3.4 Расчет допустимой невязки нивелирного хода

Пусть проложен нивелирный ход длиной L в равнинной местности, вследствие этого на каждый километр хода приходится примерно одно и то же число станций при среднем расстоянии между рейсами на одной станции $\tilde{l}$. Следовательно, число всех станций будет близким к величине $n = L/\tilde{l}$.

Предполагаем измерения на станциях равноточными со среднеквадратической погрешностью s_h.

Определим невязку нивелирного хода n_{Sh} как разность сумм измеренных значений высот h_i и их истинных (теоретических) значений $\tilde{h}_i$, определяемую по формуле

$$n_{Sh} = \sum_{i=1}^{n} h_i - \sum_{i=1}^{n} \tilde{h}_i .$$

В этом выражении h_i также рассматриваются как независимые переменные, а величина $\sum_{i=1}^{n} \tilde{h}_i = const$. Придерживаясь тех же соображений, что и при определении предельной невязки теодолитного хода, находим вначале частные производные функции n_{Sh} по переменным h_i:

$$\frac{\partial n_{Sh}}{\partial h_1} = \frac{\partial n_{Sh}}{\partial h_2} = \ldots = \frac{\partial n_{Sh}}{\partial h_n} = 1.$$

Используя выражение для дисперсии аддитивной функции, получим

$$s_{n_{Sh}}^2 = \sum_{i=1}^{n} s_h^2 = s_h^2 \sum_{i=1}^{n} 1 = n s_h^2 .$$

Тогда

$$s_{n_{Sh}} = \sqrt{n s_h^2} = s_h \sqrt{n} .$$

В качестве значения предельной невязки используем интервал значений результатов измерений, распределенных по нормальному закону относительно среднего, появление любого значения в котором происходит с вероятностью более 0,99. Следовательно

$$n_{Sh} = 3 s_{n_{Sh}} = 3 s_h \sqrt{n} = 3 s_h \sqrt{\frac{L}{\tilde{l}}} .$$

Величины s_h для каждого класса нивелирования установлены соответствующими нормативными документами и являются постоянными для каждого класса. Введем обозначение $h = 3s_h / \sqrt{\tilde{l}}$. Подставив его в формулу для расчета $n_{\Sigma h}$, получим

$$n_{\Sigma h} = h\sqrt{L}.$$

Это соотношение часто используется в геодезии. Причем коэффициент h, зависящий от класса нивелирования, принимает следующие значения:

- для нивелирования IV класса – η = 20 мм;
- технического нивелирования – η = 50 мм.

3.3.5 Расчет погрешности длины и дирекционного угла отрезка линии, заданного двумя точками с известными координатами

Пусть измерены прямоугольные координаты x, y двух точек A и B. Средние квадратические погрешности определения координат $s_{x_A} = s_{x_B} = s_{y_A} = s_{y_B} = \tilde{s}$. По координатам вычислены длина d и дирекционный угол a отрезка линии AB. Требуется определить среднеквадратические погрешности s_d, s_a определения величин d и a.

Длину линии вычисляют по формуле

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Частные производные функции d по переменным x_A, x_B, y_A, y_B определяются следующими соотношениями:

$$\frac{\partial d}{\partial x_A} = \frac{2(x_B - x_A)}{2\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} = \frac{x_B - x_A}{d} = -\cos a;$$

$$\frac{\partial d}{\partial x_B} = \cos a;$$

$$\frac{\partial d}{\partial y_A} = \frac{2(y_B - y_A)}{2\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} = \frac{y_B - y_A}{d} = -\sin a;$$

$$\frac{\partial d}{\partial y_B} = \sin a.$$

Подставляем полученные выражения для производных в общее выражение для среднеквадратического отклонения функции $s_h = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\partial f / \partial z_i\right)^2 s_{x_i}^2}$, проводя замены символов в соответствии с существом рассматриваемой задачи, получим

$$s_d = \tilde{s}\sqrt{2\cos^2 a + 2\sin^2 a} = \tilde{s}\sqrt{2}.$$

Дирекционный угол вычисляют по формуле

$$tga = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Для удобства дальнейшего вычислений функцию tga целесообразно сначала прологарифмировать:

$$\ln tga = \ln(y_B - y_A) - \ln(x_B - x_A).$$

Поскольку функция задана в неявном виде, вычисляем производную левой части этого выражения:

$$(\ln tga)' = \frac{1}{tga \cdot \cos^2 a} = \frac{1}{\sin a \cdot \cos a}.$$

Тогда частные производные функции a по переменным x_A, x_B, y_A, y_B определяются следующими соотношениями:

$$\frac{\partial a}{\partial x_A} = \frac{\sin a \cdot \cos a}{x_B - x_A} = \frac{\sin a}{d};$$

$$\frac{\partial a}{\partial x_B} = -\frac{\sin a}{d};$$

$$\frac{\partial a}{\partial y_A} = \frac{\sin a \cdot \cos a}{y_B - y_A} = -\frac{\cos a}{d};$$

$$\frac{\partial a}{\partial y_B} = \frac{\cos a}{d}.$$

Подставляем полученные выражения для производных в общее выражение для среднеквадратического отклонения функции $s_h = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\partial f / \partial z_i\right)^2 s_{x_i}^2}$, проводя замены символов в соответствии с существом рассматриваемой задачи, получим

$$s_a = \frac{\tilde{s}}{d}\sqrt{2\cos^2 a + 2\sin^2 a} = \frac{\tilde{s}\sqrt{2}}{d}.$$

Для перехода от радианной меры к градусной необходимо умножить правую часть на величину $r = 3438$ (число минут в радиане). Тогда получим окончательное выражение для среднеквадратической погрешности определения дирекционного угла

$$s_a = \frac{\tilde{s} r \sqrt{2}}{d}.$$

Таким образом, погрешность дирекционного угла, вычисленного по координатам концов отрезка прямой линии, обратно пропорциональна длине этого отрезка.

3.3.6 Среднеквадратическая погрешность разностей двойных измерений

В геодезической практике особую роль отводят однородным двойным измерениям. К таким измерениям относятся:

- измерения длины линий в прямом и обратном направлениях;
- измерения теодолитом при круге вправо и круге влево;
- измерения по двум сторонам рейки и др.

Метод двойных измерений одной и той же величины широко применяется при исследовании приборов и инструментов, изучении условий, в которых производятся измерения.

Оценку погрешностей таких измерений также проводят с использованием формул для обработки косвенных измерений. Это связано с тем, что каждый результат d двойных измерений является линейной функцией двух аргументов (результата $x_{(1)}$ первого измерения и результата $x_{(2)}$ второго измерения)

$$d = x_{(1)} - x_{(2)}.$$

Тогда дисперсия s_d^2 аддитивной функции d как результата косвенного измерения связана с дисперсиями аргументов $s_{x_{(1)}}^2$ и $s_{x_{(2)}}^2$ соотношением

$$s_d^2 = s_{x_{(1)}}^2 + s_{x_{(2)}}^2.$$

Так как оба измерения являются измерениями одной и той же величины, проводятся в одинаковых условиях и с помощью одного измерительного прибора, то $s_{x_{(1)}}^2 = s_{x_{(2)}}^2 = s_x^2$. Тогда

$$s_d^2 = 2 s_x^2,$$

s_x^2 – дисперсия однократного измерения величины x, равная дисперсии закона распределения генеральной совокупности результатов измерений.

Рассмотрим теперь ряд из n однородных двойных измерений $\{d_i\}_1^n$, $i=\overline{1,n}$, $d_i = x_{(1)i} - x_{(2)i}$. Для данной совокупности двойных измерений можно записать систему условных уравнений

$$\begin{cases} d_1 - \tilde{d} = n_1 \\ d_2 - \tilde{d} = n_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ d_i - \tilde{d} = n_i \\ \dots\dots\dots\dots \\ d_n - \tilde{d} = n_n \end{cases},$$

где $n_i = d_i - \tilde{d}$ – невязка условного уравнения; $\tilde{d}$ – оценка значения разности двойных измерений по совокупности $\{d_i\}_1^n$. Применим метод наименьших квадратов, то есть решение системы условных уравнений будем искать путем минимизации суммы квадратов невязок:

$$\sum_{i=1}^{n}(d_i - \tilde{d})^2 \to \min .$$

Из этого условия следует, что при достаточно большом n

$$\tilde{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{(1)i} - x_{(2)i})}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{(1)i}}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{(2)i}}{n} = \tilde{x} - \tilde{x} = 0 .$$

Тогда наиболее эффективная оценка дисперсии многократных двойных измерений при нулевом среднем арифметическом $\tilde{d} = 0$ имеет вид

$$s_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n} = (\tilde{d}^{(2)})^2 ,$$

где $\tilde{d}^{(2)}$ – среднее квадратическое результатов двойных измерений. Учитывая, что $s_d^2 = 2s_x^2$, получим соотношение для дисперсии s_x^2

$$s_x^2 = s_d^2/2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{2n} = (\tilde{d}^{(2)})^2/2.$$

Следовательно, средняя квадратическая погрешность разности двух равноточных измерений в $\sqrt{2}$ раз больше средней квадратической погрешности одного измерения

$$s_{\text{х}} = \pm\sqrt{2} \cdot s_d = \pm\sqrt{2} \cdot \tilde{d}^{(2)},$$

то есть средняя квадратическая погрешность каждого результата данного ряда измерений равна корню квадратному из суммы квадратов разностей парных измерений, деленной на число всех измерений.

Формула получена при условии отсутствия в измерениях систематических погрешностей. Однако наличие систематических погрешностей в результатах двойных измерений практически не оказывает сколько-нибудь заметного влияния на их разности, хотя остаточная величина ее все же может присутствовать в разностях. Поэтому вычисленные по полученной формуле средние квадратические погрешности могут оказаться преуменьшенными.

Использование разности двойных измерений представляет собой распространенный, но не единственно возможный случай использования в качестве отдельных наблюдений комбинаций (функций) частных результатов измерений. Приведем еще один полезный пример.

Предположим, имеется группа результатов измерений $\{x_i\}_1^n$. Все x_i независимы и принадлежат к одной генеральной совокупности, поэтому $m(x_i) = a$, $D(x_i) = s^2$.

Введем случайную величину $y_k = \dfrac{x_i - x_j}{2}$, которая представляет собой среднее арифметическое разности двух измерений. Найдем первые два момента (математическое ожидание и дисперсию) величины y_k, связав их с соответствующими моментами для x_i $(i \neq j)$:

$$m(y_i) = m\left(\frac{x_i - x_j}{2}\right) = \frac{m(x_i) - m(x_j)}{2} = \frac{a - a}{2} = 0,$$

$$D(y_i)=D\left(\frac{x_i-x_j}{2}\right)=\frac{D(x_1)+D(x_2)}{4}=\frac{2s^2}{4}=\frac{s^2}{2}.$$

Таким образом, случайная величина $y_k=\frac{x_i-x_j}{2}$, как и рассмотренная ранее разность двух равноточных измерений одной и той же величины также имеет математическое ожидание, равное нулю, а дисперсию – в четыре раза меньшую.

Следовательно, обрабатывая группу y_k $(k=1,...,r)$, можно также найти параметры величины x_i $(i=1,...,n)$. В частности, чтобы найти оценку дисперсии x, надо удвоить оценку дисперсии y.

Если же ввести случайную величину $y'_k=\frac{x_i+x_j}{2}$, то в этом случае

$$m(y'_i)=m\left(\frac{x_i+x_j}{2}\right)=\frac{m(x_i)+m(x_j)}{2}=\frac{a+a}{2}=a,$$

$$D(y'_i)=D\left(\frac{x_i+x_j}{2}\right)=\frac{D(x_1)+D(x_2)}{4}=\frac{2s^2}{4}=\frac{s^2}{2}.$$

То есть математическое ожидание величины y' равно математическому ожиданию величины x, а дисперсия y', так же, как и в предыдущем случае, вдвое меньше дисперсии x.

Если имеется $\{x_i\}_1^n$ результатов измерения величины x, то число реализаций r случайных величин y и y', которые могут быть сформированы, определяется соотношением

$$r=C_n^2=2\frac{n!}{2(n-2)}=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Следовательно, $r=1$ при $n=2$; $r=3$ при $n=3$; $r>n$ при $n>4$. Строго говоря, данная процедура может быть оправдана только при ***значительном*** числе измерений $\{x_i\}_1^n$, а соответствующий поправочный коэффициент к оценке дисперсии, отражающий наличие связи статистической связи значений y (или y'), найти нелегко. Эти же соображения полностью относятся и к разности двойных измерений.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое «косвенное измерение»? Почему в геодезии возникает потребность косвенных измерений?

2. Запишите формулу разложения произвольной непрерывной и дифференцируемой функции одной переменной в ряд Тейлора. При каких условиях возможно ограничить ряд Тейлора линейным членом? Каким соотношением связаны дисперсии аргумента и функции?

3. Запишите общее соотношение, связывающее дисперсии аргументов и функции нескольких переменных? Как это соотношение изменится, если результаты измерений величин-аргументов окажутся статистически зависимыми?

4. Определите связь дисперсии аддитивной функции произвольного вида с дисперсиями величин-аргументов. Если имеется несколько величин с извесными дисперсиями, то какая линейная функция этих величин будет обладать меньшей дисперсией: сумма или среднее арифметическое?

5. Определите связь дисперсии мультипликативной функции произвольного вида с дисперсиями величин-аргументов. Если имеется несколько величин с извесными дисперсиями, то какая функция этих величин будет обладать меньшей дисперсией: произведение или среднее геометрическое?

6. Измерены три величины x, y, z с известными дисперсиями s_x^2, s_y^2, s_z^2. Определите дисперсию величины w, если она связана с величинами x, y, z следующими соотношениями:

$$w = 2(x + y) + z^4,$$

$$w = \frac{7x^2}{z^3} + \ln y,$$

$$w = \frac{\sin x + \cos y}{e^{3z}}.$$

7. Как рассчитать допустимую угловую невязку теодолитного хода?

8. Как рассчитать допустимую невязку нивелирного хода?

9. Как рассчитать погрешность длины и дирекционного угла отрезка линии, заданного двумя точками с известными координатами?

10. Определите связь среднеквадратической погрешности разностей двойных измерений с среднеквадратической погрешностью единичного измерения. Как изменится эта связь, если измерять среднюю разность двух измерений или среднюю сумму?

Список литературы к главе 3

1. Ананченко В.Н. Теория измерений : учебное пособие / В.Н. Ананченко, Л.А. Гофман. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2002. – 214 с.

2. Большаков В.Д. Теория ошибок наблюдений : учебник для вузов / В.Д. Большаков. – 2-е изд., перераб. и доп. М.: Недра, 1983. – 223 с.

3. Гайдышев И.П. Анализ и обработка данных : Специальный справочник / И.П. Гайдышев. – СПб.: Питер, 2001. – 752 с.

4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2003. – 479 с.

5. Куштин И.Ф. Геодезия: обработка результатов измерений : учебное пособие / И.Ф. Куштин. – М.: ИКЦ «МарТ», 2006. – 288 с.

6. Протасов К.В. Статистический анализ экспериментальных данных / К.В. Протасов. – М.: Мир, 2005. – 142 с.

7. Рабинович С.Г. Погрешности измерений / С.Г. Рабинович. – Л.: Энергия, 1978. – 262 с.

Глава 4
Обработка результатов неравноточных измерений

Если все результаты единичных измерений из множества $\{x_i\}_1^n$ принадлежат к одной генеральной совокупности, то есть получены в одинаковых условиях с использованием одного и того же измерительного прибора, одним методом, то они обладают одинаковой погрешностью, характеризуемой величиной дисперсии s^2 распределения результатов измерений. Такие измерения называют ***равноточными***. Если же измерения одной и той же величины относятся к разным генеральным совокупностям, то есть осуществлены в разных условиях с использованием различных измерительных приборов и методов, то они обладают различными погрешностями (различными значениями дисперсии s_i^2). Такие измерения называют ***неравноточными***. Следовательно, каждое единичное измерение некоторой физической величины всегда характеризуется парой чисел: значением x_i и дисперсией s_i^2 генеральной совокупности, к которой принадлежит это измерение. В случае равноточных измерений все s_i^2 одинаковы. Ранее именно равноточные измерения являлись основным предметом рассмотрения. В настоящей же главе будут рассмотрены особенности неравноточных измерений, их связь с равноточными, алгоритмы обработки результатов неравноточных измерений и оценки их погрешностей.

§ 4.1 Особенности неравноточных измерений. Вес результата измерения

Рассмотрим общую схему измерения величины x. Эта схема характеризуется тем, что оценку $\tilde{x}$ значения этой величины формируют по совокупности доступных результатов измерений $\{y_i\}_1^n$ величины y, связанной с исходной функциональной зависимостью $y = f(x)$. Задача восстановления оценки величины $\tilde{x}$ по данным измерений величины y, отягощенных погрешностями, называется ***обратной задачей*** измерений.

Построим систему условных уравнений для случая измерений значений функции $y_i = f(x_i)$:

$$\begin{cases} f(x_1) - f(\tilde{x}) = n_1 \\ f(x_2) - f(\tilde{x}) = n_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(x_i) - f(\tilde{x}) = n_i \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(x_n) - f(\tilde{x}) = n_n \end{cases}$$

где $n_i = y_i - \tilde{y}$ – невязка i-ого условного уравнения, $y_i = f(x_i)$, $\tilde{y} = f(\tilde{x})$. Применим метод наименьших квадратов, который предусматривает поиск решения этой системы уравнений исходя из условия достижения минимума суммой квадратов невязок. Предположим при этом, что не все условные уравнения одинаково «ценны» для построения решения. Поэтому вклад каждой из невязок уравнений в формирование критерия для поиска решения также неодинаков. Будем характеризовать значимость каждого условного уравнения для построения окончательного решения некоторым числом $q_i > 0$. Тогда критерий поиска решения системы условных уравнений может быть представлен в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i n_i^2 \to \min,$$

а алгоритм поиска решения (нахождения оптимальной оценки $\tilde{x}$) как

$$\tilde{x} = \underset{x \in W_x}{arg\,min} \sum_{i=1}^{n} q_i \left[f(x_i) - f(\tilde{x}) \right]^2$$

Решая уравнение

$$\frac{\partial}{\partial [f(\tilde{x})]} \sum_{i=1}^{n} q_i \left[f(x_i) - f(\tilde{x}) \right]^2 = 0,$$

получим

$$f(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{q_i}{\sum_{i=1}^{n} q_i} \right) f(x_i).$$

Или окончательно выражение для оценки величины $\tilde{x}$:

$$\tilde{x} = f^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{q_i}{\sum_{i=1}^{n} q_i}\right) f(x_i)\right] = f^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} g_i f(x_i)\right],$$

где $f^{-1}(\bullet)$ – функция обратная функции $f(\bullet)$, такая, что $f^{-1}(y) = x$; $g_i = \dfrac{q_i}{\sum_{i=1}^{n} q_i}$ – нормированный вес i-го частного результата косвенного измерения, отражающий его удельный вклад в формирование оценки $\tilde{x}$. Полученная оценка $\tilde{x}$ является ***квазисредним***. Подчеркнем, что вес $g_i = q_i / \sum_{i=1}^{n} q_i$ при произвольно выбранных значениях $q_i > 0$ удовлетворяет условию нормировки $\sum_{i=1}^{n} g_i = 1$. Докажем это:

$$\sum_{i=1}^{n} g_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\sum_{i=1}^{n} q_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{\sum_{i=1}^{n} q_i} = 1$$

Полученные оценки величины $\tilde{x}$ в зависимости от вида функции $y = f(x)$ могут приобретать различный вид. Для линейной функции, когда $y = cx$, где $c = const$, то есть в случае непосредственных (прямых) измерений величины x, оценка соответствует взвешенному среднему арифметическому:

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{n} g_i x_i .$$

Для квадратичной функции $y = x^2$ оценка – взвешенное среднее квадратическое:

$$\tilde{x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} g_i x_i^2} .$$

Для функции $y = 1/x$ оценка – взвешенное среднее гармоническое:

$$\tilde{x} = \left(\sum_{i=1}^{n} g_i x_i^{-1} \right)^{-1}.$$

Для логарифмической функции $y = \ln x$ оценка – взвешенное среднее геометрическое:

$$\tilde{x} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} g_i \ln x_i \right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i^{g_i} \right) = \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\ln x_i^{g_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{g_i}.$$

Сделаем еще несколько замечаний о связи взвешенных и невзвешенных оценок, с которыми мы уже сталкивались ранее. Рассмотрим условие нормировки весов в случае, когда все веса одинаковы $g_i = g$, то есть все результаты измерений равнозначны для построения оценки. Тогда справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{n} g_i = \sum_{i=1}^{n} g = g\sum_{i=1}^{n} 1 = gn = 1$$

Следовательно, в случае равенства весов измерений вес каждого измерения равен

$$g = \frac{1}{n}.$$

Подставив такие значения весов в выражения для взвешенных средних, получим уже известные оценки (среднее арифметическое, среднее квадратическое, среднее гармоническое и среднее геометрическое).

Таким образом, решение обратной задачи измерения приводит к множеству возможных оценок измеряемой величины $\tilde{x}$ в зависимости от характера функции $y = f(x)$ и значимости отдельных результатов измерений, характеризуемой их весами.

Определим связь весов с параметрами, характеризующими точность результатов измерений. Интуитивно понятно, что значимость отдельного результата должна быть тем больше, чем выше точность этого результата, то есть меньше его погрешность. Установим эту связь в количественной мере для случая непосредственных измерений величины x, распределенной по нормальному закону. Используем метод максимального правдоподобия.

Пусть в имеющейся группе результатов измерений $\{x_i\}_1^n$ каждый отдельный результат x_i распределен по нормальному закону с функцией плотности вероятностей следующего вида:

$$p_i(x_i, a, s_i) = \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - a)^2}{2\sigma_i^2}}.$$

В отличие от рассмотренного ранее случая равноточных измерений, x_i принадлежат к разным генеральным совокупностям, распределение которых характеризуется различными дисперсиями s_i^2. Однако математические ожидания этих распределений одинаковы, то есть все генеральные совокупности были сформированы при измерении одного и того же значения величины x. Условие

$$\forall x_i,\, m(x_i) = a$$

является необходимым для формирования оценок по результатам неравноточных измерений.

Функция правдоподобия может быть представлена как

$$L = (1/\sqrt{2\pi s_i^2})^n e^{-\frac{1}{2s_i^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2}.$$

Для нахождения максимума L удобно исследовать $ln L$. Тогда

$$\ln L = -(n/2)\ln 2p - (n/2)\ln s_i^2 - (1/2s_i^2)\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2.$$

Максимум L достигается, если $\partial L/\partial a = 0$:

$$\partial L / L\partial a = \sum_{i=1}^{n}(1/s_i^2)(x_i - a) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{k}{s_i^2}(x_i - a) = 0,$$

где k – константа, имеющая размерность $[x^2]$, общая для всех слагаемых суммы.

Из этого уравнения находим оптимальную оценку для a:

$$\tilde{x} = \tilde{a} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{s_i^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s_i^2}}\right)x_i.$$

Сопоставляя вид полученной оценки с построенным ранее взвешенным средним арифметическим, можно утверждать, что нормированный вес связан с дисперсией результатов измерений соотношением

$$g_i = \frac{1/s_i^2}{\sum_{i=1}^{n} 1/s_i^2},$$

а вес, не подвергнутый нормировке, может иметь любое положительное значение такое, что

$$q_i = \frac{K}{s_i^2},$$

где $K \geq 0$ – любое число, отражающее значимость результата измерения x_i. При $K = 0$ результат не имеет практического значения и полностью игнорируется при построении оценки величины x. С формальной точки зрения коэффициент K должен иметь размерность $[x^2]$, чтобы обеспечивать безразмерность весового коэффициента q_i. Нормированный вес является безразмерным при любых обстоятельствах.

Следует обратить внимание на то, что полученная обратно пропорциональная зависимость веса результата измерения и его дисперсии связана с нормальным законом распределения результатов. Если вид закона распределения отличается от нормального веса измерений могут определяться по-другому. Покажем это на примере результатов, распределенных по закону Лапласа.

Для этого определим максимально правдоподобную оценку по результатам неравноточных измерений x_i, распределенных по закону Лапласа

$$p(x_i) = \frac{a_i}{2}\exp(-a_i|x_i - \tilde{x}|),$$

где $a_i > 0$ – параметр масштаба распределения результата x_i; $\tilde{x} = \tilde{x}_i = a$ – параметр сдвига центра распределения, одинаковый для всех x_i ($-\infty < x < +\infty$; $-\infty < \tilde{x} < +\infty$); $s_i^2 = 2/a_i^2$ – дисперсия распределения x_i.

В этом случае функция правдоподобия имеет вид

$$L = (a_i/2)^{\mathrm{n}} \mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^{n} a_i |\mathrm{x_i} - \tilde{x}|}.$$

Для нахождения максимума L удобно исследовать lnL:

$$\ln L = n\ln(a_i/2) - \sum_{i=1}^{n} a_i |x_i - \tilde{x}|$$

Функция lnL не является дифференцируемой по $\tilde{x}$. В точках $x = x_i$ производная этой функции имеет разрывы. Вместе с тем анализ этой функции показывает, что максимум lnL, а тем самым и функции правдоподобия, достигается в том случае, если выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{n} a_i |x_i - \tilde{x}| = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{2}}{s_i} |x_i - \tilde{x}| \to \min.$$

Данное соотношение определяет условие формирования оценки, которая минимизирует взвешенный модульный критерий. В качестве веса выступает параметр масштаба a_i распределения результата x_i. Минимуму этого критерия соответствует оптимальная оценка, совпадающая с ***выборочной медианой*** в том случае, если все значения s_i близки, или с ***максимально точным значением*** x_i, обладающим минимальным s_i. В любом случае вес неравноточного измерения x_i, распределенного по закону Лапласа, связан обратной пропорцией не с дисперсией s_i^2, а со среднеквадратическим отклонением s_i.

Несмотря на существование подобных исключений, в дальнейшем будем использовать веса, обратно пропорциональные дисперсиям результатов (их погрешности), подчеркивая близость обрабатываемых данных измерений к случайным величинам, распределенным по нормальному закону.

§ 4.2 Погрешность оценок, сформированных по результатам неравноточных измерений

Все рассмотренные в §4.1 взвешенные оценки, сформированные в процессе обработки результатов неравноточных измерений, относятся к классу взвешенных средних степенных

$$\tilde{x} = \tilde{x}^{(k)} = \left(\sum_{i=1}^{n} g_i x_i^k \right)^{1/k},$$

где g_i – нормированный вес i-го результата измерений; k – показатель степени, принимающий значения: $k = -1$ для взвешенного среднего гармонического, $k = 1$ для взвешенного среднего арифметического, $k = 2$ для взвешенного среднего квадратического. Кроме того, легко можно доказать, что

$$\lim_{k \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} g_i x_i^k \right)^{1/k} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{g_i} = \tilde{x}^{(0)},$$

то есть взвешенное среднее геометрическое также относится к группе взвешенных средних степенных и имеет показатель степени $k = 0$. Оценки в виде взвешенных средних степенных чрезвычайно важны для теории и практики обработки результатов измерений (в том числе геодезических) в силу того, что эти оценки удовлетворяют трем фундаментальным свойствам.

1. Значение оценки определяется значениями частных результатов измерений (всеми, частью или хотя бы одним), то есть оно должно усреднять совокупность значений результатов $\{x_i\}_1^n$, быть средним по Коши:

$$\min\{x_1,...,x_n\} \le \tilde{x} \le \max\{x_1,...,x_n\},$$

где $\min\{x_1,...,x_n\} = x_{\min}$, $\max\{x_1,...,x_n\} = x_{\max}$ – минимальное и максимальное значения из совокупности $\{x_i\}_1^n$. Равенство соответствует ситуации, когда $x_1 = ... = x_i = ... = x_n$. Взвешенное среднее степенное относится к классу оценок, формируемых по всей совокупности полученных результатов.

2. Для того чтобы можно было бы сравнивать между собой альтернативы, характеризуемые двумя множествами различных значений частных результатов измерений $\{x_i\}_1^n$ и $\{x_i'\}_1^n$, но одинаковыми значениями весов $q_i = q_i'$, оценка $\tilde{x}(x_1,...,x_n)$ должна быть монотонной функцией по всем аргументам x_i, то есть увеличение значения хотя бы одного частного значения x_i должно всегда приводить к возрастанию (или убыванию) значения оценки $\tilde{x}$:

$$\forall x_i, x_1' \in \Omega_x,\ x_i > x_i \Rightarrow \tilde{x} > \tilde{x}'$$

для монотонно возрастающей $\tilde{x}(x_1,...,x_n)$;

$$\forall x_i, x_1' \in \Omega_x,\ x_i > x_i \Rightarrow \tilde{x} < \tilde{x}'$$

для монотонно убывающей $\tilde{x}(x_1,...,x_n)$.

3. Для количественного сравнения альтернатив в случаях, когда физическая величина x измерена в метрических и некоторых нелинейных шкалах, необходимо, чтобы оценка обладала свойством однородности (точнее, однородности первого порядка):

$$\tilde{x}(lx_1,...,lx_n) = l\tilde{x}(x_1,...,x_n),$$

где $l \geq 0$. В чрезвычайно широком классе оценок в виде квазисредних только оценки в виде взвешенных средних степенных обладают всеми тремя свойствами.

На этом основании задачу определения связи дисперсии оценки и дисперсий результатов неравноточных измерений будем решать в общем виде для взвешенного среднего степенного произвольного порядка.

Множество возможных взвешенных оценок, определенных по совокупности результатов неравноточных измерений $\{x_i\}_1^n$ с нормированными весами g_i в виде взвешенных степенных средних, удовлетворяет цепочке неравенств, которая будет использована в дальнейших выкладках

$$\tilde{x}^{(-\infty)} \leq ... \leq \tilde{x}^{(-m)} \leq ... \leq \tilde{x}^{(-1)} \leq \tilde{x}^{(0)} \leq \tilde{x}^{(1)} \leq \tilde{x}^{(2)} \leq ... \leq \tilde{x}^{(m)} \leq ... \leq \tilde{x}^{(\infty)},$$

где $m = |k|$, $m \in [0, \infty)$. Равенства в этой цепочке соответствуют случаю, когда $x_1 = ... = ...x_i = ... = x_n$.

Рассматривая взвешенную оценку $\tilde{x}^{(k)} = f(x_1,...,x_n)$ как функцию n аргументов x_i, каждый из которых обладает весом g_i, то есть известен с точностью, характеризуемой дисперсией s_i^2, определим с использованием известного правила $s_{\tilde{x}}^2 = \sum_{i=1}^{n} (\partial f / \partial x_i)^2 s_i^2$ дисперсию оценки $\tilde{x}^{(k)}$ в следующем виде:

$$s_{\tilde{x}^{(k)}}^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} s_i^{-2} \right)^{-1} \left(\frac{\tilde{x}^{(2k-2)}}{\tilde{x}^{(k)}} \right)^{2k-2},$$

где $\tilde{x}^{(2k-2)} = \left(\sum_{i=1}^{n} g_i x_i^{2k-2} \right)^{1/(2k-2)}$, $\tilde{x}^{(k)} = \left(\sum_{i=1}^{n} g_i x_i^{k} \right)^{1/k}$ – взвешенные средние степенные порядков $2k-2$ и k соответственно. Для частных случаев взвешенных средних гармонического ($k=-1$), геометрического ($k=0$), арифметического ($k=1$), квадратического ($k=2$) полученная формула дает следующие выражения для соответствующих дисперсий:

$$s^2_{\tilde{x}^{(-1)}} = \left(\sum_{i=1}^{n} s_i^{-2}\right)^{-1} \left(\frac{\tilde{x}^{(-1)}}{\tilde{x}^{(-4)}}\right)^4; \; s^2_{\tilde{x}^{(0)}} = \left(\sum_{i=1}^{n} s_i^{-2}\right)^{-1} \left(\frac{\tilde{x}^{(0)}}{\tilde{x}^{(-2)}}\right)^2;$$

$$s^2_{\tilde{x}^{(1)}} = \left(\sum_{i=1}^{n} s_i^{-2}\right)^{-1}; \; s^2_{\tilde{x}^{(2)}} = \left(\sum_{i=1}^{n} s_i^{-2}\right)^{-1}.$$

Выражение для $s^2_{\tilde{x}^{(1)}}$ определяет дисперсию непосредственных (прямых) неравноточных измерений, которая в случае равноточных измерений ($g_i = g, s_i^2 = s^2$) совпадает с известным выражением для дисперсии выборочного среднего $s^2_{\tilde{x}^{(1)}} = s^2/n$. Характерно, что дисперсии оценок в виде взвешенных средних арифметического и квадратического оказались равны $s^2_{\tilde{x}^{(1)}} = s^2_{\tilde{x}^{(2)}}$. В этих двух случаях дисперсия $s^2_{\tilde{x}^{(k)}}$ будет иметь минимальное значение среди степенных оценок с целыми показателями степени. Функция $s^2_{\tilde{x}^{(k)}}(k)$, являясь непрерывной функцией k, возрастает на интервалах $k>2$ и $k<1$. Соответствующие значения $s^2_{\tilde{x}^{(k)}}(k)$ будут превышать величину $s^2_{\tilde{x}} = (\sum_{i=1}^{n} s_i^{-2})^{-1}$. Однако рост дисперсии $s^2_{\tilde{x}^{(k)}}$ по мере роста $|k|$ ограничен: $\lim_{k\to\infty} s^2_{\tilde{x}^{(k)}} = s^2_{x_{max}}$, $\lim_{k\to-\infty} s^2_{\tilde{x}^{(k)}} = s^2_{x_{\min}}$, где $s^2_{x_{\min}}$, $s^2_{x_{\max}}$ – дисперсии минимального и максимального значений из совокупности $x_1,...,x_n$. В простейшем, но часто встречающемся на практике случае равноточных ($s_i^2 = s^2$) значений частных показателей минимальное значение диспепсии оценки $\min\{s^2_{\tilde{x}^{(k)}}\} < s^2/n$, а максимальное – $\max\{s^2_{\tilde{x}^{(k)}}\} = s^2$. Примечательно, что на интервале $1<k<2$ возможны оценки с дробными показателями степени с дисперсией меньшей, чем $s^2_{\tilde{x}} = (\sum_{i=1}^{n} s_i^{-2})^{-1}$.

Следует обратить внимание, что только оценка дисперсии взвешенного среднего арифметического справедлива при любых значениях дисперсий s_i^2. Все остальные хорошо отражают влияние дисперсии отдельных неравноточных измерений на величину дисперсии взвешенной оценки при малых s_i^2. Точность рачетов снижается по мере роста погрешности отдельных неравноточных измерений.

§ 4.3 Объединение результатов прямых измерений

Одну и ту же величину часто измеряют в разное время, в разных условиях, различными измерительными приборами, а порой разными методами. Поэтому возникает задача объединения полученных данных, с тем чтобы найти наиболее точную оценку измеряемой величины, учитывающую всю полученную информацию.

Во время длительных циклов измерений, собирая в группы данные за ограниченное время, можно получать ***промежуточные оценки*** измеряемой величины, естественно находить ***окончательный результат*** измерения путем ***объединения*** промежуточных результатов, без лишних вычислений.

Поэтому задача ***объединения*** результатов измерений имеет большое практическое значение, в том числе в геодезической практике. Вместе с тем важно отличать ситуации, при которых объединение результатов оправдано, от тех, при которых оно ***недопустимо***. Лишено смысла объединение таких результатов измерений, при которых, по существу, измерялись ***разные*** по размеру величины.

Математически строгое решение имеет следующая задача.

Есть L групп измерений величины x одного и того же размера a. По измерениям каждой группы составлены оценки измеряемой величины $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_L$. Измерения осуществлены методом прямых измерений, поэтому в качестве оценок измеряемой величины использованы средние арифметические результатов в каждой группе. При этом математические ожидания частных оценок равны истинному значению a

$$m(\tilde{x}_1) = m(\tilde{x}_2) = ... = m(\tilde{x}_L) = a .$$

Известны дисперсии $s_1^2, s_2^2, ..., s_L^2$ результатов измерений в каждой группе и число измерений $n_1, n_2, ..., n_L$ в каждой группе.

Требуется найти оценку измеряемой величины по данным всех групп наблюдений. Эту оценку обозначают $\approx\!\!\!\!\!x$ и называют ***совокупным средним***.

Различие дисперсий результатов измерений в каждой группе позволяет рассматривать проиежуточные оценки как результаты неравноточных измерений. Поэтому будем искать $\approx\!\!\!\!\!x$ как линейную функцию $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_L$, то есть как взвешенное среднее арифметическое:

$$\tilde{\tilde{x}} = \sum_{i=1}^{L} g_i \tilde{x}_i .$$

В геодезии такую оценку иногда называют ***общей арифметической серединой***.

Следовательно, задача сводится к нахождению весовых коэффициентов (весов) g_i.

Поскольку $m(\tilde{x}_i) = a$, то и $m(\tilde{\tilde{x}}) = a$, поэтому можно записать

$$a = m(\tilde{\tilde{x}}) = m\left(\sum_{i=1}^{L} g_i \tilde{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{L} g_i m(\tilde{x}_i) = \sum_{i=1}^{L} g_i a = a\sum_{i=1}^{L} g_i \quad _i .$$

Следовательно

$$\sum_{i=1}^{L} g_i = 1.$$

Потребуем, чтобы $\tilde{\tilde{x}}$ была эффективной оценкой a, то есть дисперсия $D(\tilde{\tilde{x}}) = s_{\tilde{\tilde{x}}}^2$ была минимальной. Для этого найдем выражение для $D(\tilde{\tilde{x}})$, пользуясь формулой

$$D(\tilde{\tilde{x}}) = D\left[\sum_{i=1}^{L} g_i \tilde{x}_i\right] = \sum_{i=1}^{L} g_i^2 D(\tilde{x}_i) = \sum_{i=1}^{L} g_i^2 s_{\tilde{x}_i}^2 .$$

Используя условие нормировки весов $\sum_{i=1}^{L} g_i = 1$, представим $g_L = 1 - \sum_{i=1}^{\{-1} g_i$. Найдем условие минимума $D(\tilde{\tilde{x}})$. Для этого возьмем частные производные от $D(\tilde{\tilde{x}})$ по каждой величине g_i и приравняем их нулю. Поскольку у нас $L-1$ неизвестных, то получим $L-1$ уравнений:

$$2g_1 s^2_{\tilde{x}_1} - 2s^2_{\tilde{x}_L}\left(1-\sum_{i=1}^{\{-1} g_i\right)=0$$

$$2g_1 s^2_{\tilde{x}_2} - 2s^2_{\tilde{x}_L}\left(1-\sum_{i=1}^{\{-1} g_i\right)=0$$

……………………………..

$$2g_1 s^2_{\tilde{x}_{l-1}} - 2s^2_{\tilde{x}_L}\left(1-\sum_{i=1}^{\{-1} g_i\right)=0 \quad ,$$

Так как второе слагаемое во всех уравнениях одинаково, то справедливы соотношения

$$g_1 s^2_{\tilde{x}_1} = g_2 s^2_{\tilde{x}_2} = \ldots = g_{L-1} s^2_{\tilde{x}_{l-1}} = g_L s^2_{\tilde{x}_L} .$$

Эта система равенств дополнена соотношениями, содержащими весовой коэффициент g_L, на том основании, что устранение g_L из системы уравнений с использованием соотношения $g_L = 1-\sum_{i=1}^{\{-1} g_i$ не диктовалось какими-либо принципиальными соображениями и вместо g_L можно было взять весовой коэффициент с любым номером.

Таким образом, веса средних арифметических групп наблюдений для того, чтобы сформированная оценка была эффективной, должны, помимо условия нормировки, удовлетворять следующему условию:

$$g_1 : g_2 : \ldots : g_L = s^{-2}_{\tilde{x}_1} : s^{-2}_{\tilde{x}_2} : \ldots : s^{-2}_{\tilde{x}_L} .$$

Чтобы найти веса g_i, нужно знать либо ***дисперсии*** средних арифметических, либо ***отношения дисперсий***. Если мы имеем $s^2_{\tilde{x}_i}$, то, полагая, что $g_i' \sim s_i^{-2}$, получим

$$g_i = \frac{g_i'}{\sum_{i=1}^{L} g'}$$

Поскольку веса – ***неслучайные*** величины, нетрудно определить дисперсию оценки $\tilde{\tilde{x}}$:

$$s^2_{\tilde{\tilde{x}}} = D(\tilde{\tilde{x}}) = \sum_{i-1}^{L} g_i^2 D(\tilde{x}_i) = \frac{\sum\limits_{i-1}^{L} (g_i')^2 D(\tilde{x}_i)}{(\sum\limits_{i-1}^{L} g_i')^2} = \frac{\sum\limits_{i-1}^{L} (1/s^2_{\tilde{x}_i})^2 s^2_{\tilde{x}_i}}{\left[\sum\limits_{i-1}^{L} (1/s^2_{\tilde{x}_i})\right]^2} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i-1}^{L} (1/s^2_{\tilde{x}_i})}{\left[\sum\limits_{i-1}^{L} (1/s^2_{\tilde{x}_i})\right]\left[\sum\limits_{i-1}^{L} (1/s^2_{\tilde{x}_i})\right]} = \frac{1}{\sum\limits_{i-1}^{L} (1/s^2_{\tilde{x}_i})}.$$

Это выражение совпадает с полученной в §4.2 формулой для дисперсии оценки в виде взвешенного среднего арифметического. Оно позволяет получить точные веса g_i, если известны не сами дисперсии $s^2_{\tilde{x}_i}$, а только их отношения.

В большинстве случаев дисперсии средних арифметических групп (или их отношения) недоступны. Тогда используют оценку дисперсии среднего взвешенного. Рассмотрим вначале частный случай объединения результатов серий измерений, когда все дисперсии в группах одинаковы, а количество наблюдений в группах различное. В этом случае можно принять $g_i' = n_i$. Тогда веса средних арифметических в группах будут $g_j = n_j / N$, где $N = \sum\limits_{j=1}^{L} n_j$ – число измерений в объединенной группе; n_j – количество измерений в отдельной группе, $j = \overline{1, L}$.

Совокупное среднее можно представить как

$$\tilde{\tilde{x}} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{L} \sum\limits_{i=1}^{n_j} x_{ji}}{N},$$

x_{ji} – i-й результат измерений в j-й группе.

Если развернуть сумму в числителе, то получим

$$\tilde{\tilde{x}} = \frac{1}{N} \left[\left(x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n_1} \right) + \ldots + \left(x_{L1} + x_{L2} + \ldots + x_{Ln_L} \right) \right] =$$

$$= \frac{n_1}{N} \tilde{x}_1 + \frac{n_2}{N} \tilde{x}_2 + \ldots + \frac{n_L}{N} \tilde{x}_{:L} = \sum_{j=1}^{L} g_j \tilde{x}_j .$$

Оценку среднего квадратического отклонения среднего взвешенного можно найти, рассматривая среднее взвешенное как среднее полученной большой группы наблюдений:

$$\tilde{s}^2_{\tilde{\tilde{x}}} = \frac{\sum_{j=1}^{L}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ji} - \tilde{\tilde{x}})^2}{N(N-1)}.$$

Выполнив простые преобразования, получим

$$\sum_{j=1}^{L}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ji} - \tilde{\tilde{x}})^2 = \sum_{j=1}^{L}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ji} - \tilde{x}_j + \tilde{x}_j - \tilde{\tilde{x}})^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{L}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ji} - \tilde{x}_j)^2 + 2\sum_{j=1}^{L}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ji} - \tilde{x}_j)(\tilde{x}_j - \tilde{\tilde{x}}) + \sum_{j=1}^{L}\sum_{i=1}^{n_j}(\tilde{x}_j - \tilde{\tilde{x}})^2$$

Второй член суммы равен нулю, поскольку

$$\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ji} - \tilde{x}_j) = 0,\ \sum_{j=1}^{L}(\tilde{x}_j - \tilde{\tilde{x}}) = 0.$$

Поэтому

$$\tilde{s}^2_{\tilde{\tilde{x}}} = \frac{1}{N(N-1)}\left[\sum_{j=1}^{L}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ji} - \tilde{x}_j)^2 + \sum_{j=1}^{L}\sum_{i=1}^{n_j}(\tilde{x}_j - \tilde{\tilde{x}})^2\right].$$

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ji} - \tilde{x}_j)^2 = (n_j - 1)\tilde{s}^2_j,\text{ а } \sum_{i=1}^{n_j}(\tilde{x}_j - \tilde{\tilde{x}})^2 = n_j(\tilde{x}_j - \tilde{\tilde{x}})^2..$$

Тогда, сохраняя лишь суммирование по группам, получим

$$\tilde{s}^2_{\tilde{\tilde{x}}} = \frac{1}{N(N-1)}\left[\sum_{j=1}^{L}(n_j - 1)\tilde{s}^2_j + \sum_{j=1}^{L}n_j(\tilde{x}_j - \tilde{\tilde{x}})^2\right]$$

Первый член в полученной формуле характеризует рассеивание результатов измерений в группах, а второй – рассеивание средних арифметических групп.

Полученный результат легко может быть обобщен на случай произвольных весов, если вспомнить, что $g_j = n_j / N$. Тогда

$$\tilde{s}^2_{\tilde{\tilde{x}}} = \frac{1}{N-1}\left[\sum_{j=1}^{L}g_j\frac{n_j - 1}{n_j}\tilde{s}^2_j + \sum_{j=1}^{L}g_j(\tilde{x}_j - \tilde{\tilde{x}})^2\right].$$

Рассмотрим вопрос о влиянии погрешности определения весовых коэффициентов на погрешность взвешенного среднего арифметического. Если посмотреть на общий вид формулы, определяющей среднее взвешенное

$$\tilde{\tilde{x}} = \sum_{j=1}^{L} g_j \tilde{x}_j ,$$

то, поскольку веса g_j и взвешиваемые значения $\tilde{x}_j$ входят в нее ***симметрично***, можно предположить, что веса необходимо определять с той же точностью, что и $\tilde{x}_j$. Между тем на практике обычно веса выражают числами с одной или двумя значащими цифрами. Как же отражается неточность в определении весов на погрешности взвешенного среднего арифметического?

Предположим, что суммируемые с весами g_j значения $\tilde{x}_j$ фиксированы, а сами веса удовлетворяют условию нормировки $\sum_{i=1}^{L} g_i = 1$. Это условие выполняется и для неточно заданных весов $\tilde{g}_j$. Следовательно $\sum_{j=1}^{L} \tilde{g}_j - g_j = \sum_{j=1}^{L} \Delta g_j = 0$, где Δg_j – погрешность определения веса, $j = \overline{1, L}$.

Обозначим точное значение взвешенного среднего арифметического как $\tilde{\tilde{x}} = y$. Оценим погрешность нахождения его оценки

$$\Delta y = \sum_{j=1}^{L} \tilde{g}_j \tilde{x}_j - \sum_{j=1}^{L} g_j \tilde{x}_j = \sum_{j=1}^{L} \Delta g_j \tilde{x}_j .$$

Выразим погрешность определения веса для первой группе Dg_1 через погрешности определения весов для других групп:

$$\Delta g_1 = -(\Delta g_2 + \Delta g_3 + ... + \Delta g_L)$$

и подставим в выражение для Δy:

$$\Delta y = \sum_{j=1}^{L} \Delta g_j \tilde{x}_j = -(\Delta g_2 + \Delta g_3 + ... + \Delta g_L)\tilde{x}_1 + \sum_{j=2}^{L} \Delta g_j \tilde{x}_j .$$

Или в форме относительных погрешностей

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{g_2(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2)(\Delta g_2 / g_2) + ... + g_L(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_L)(\Delta g_L / g_L)}{\sum_{j=1}^{L} g_j \tilde{x}_j}$$

Значения относительных погрешностей весовых коэффициентов $\Delta g_j / g_j$ неизвестны. Предположим, что они ограничены, т. е. $\left|\Delta g_j / g_j\right| < \left|\Delta g / g\right|$, где $\Delta g / g$ максимальная (по модулю) погрешность определения весового коэффициента.

Тогда

$$\frac{\Delta y}{y} \le \left|\Delta g / g\right| \frac{g_2(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) + \ldots + g_L(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_L)}{\sum_{j=1}^{L} g_j \tilde{x}_j}$$

Числитель правой части можно преобразовать к следующему виду:

$$g_2(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) + \ldots + g_L(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_L) = g_2\tilde{x}_2 + \ldots + g_L\tilde{x}_L - (g_2 + \ldots + g_L)\tilde{x}_1 =$$

$$= g_2\tilde{x}_2 + \ldots + g_L\tilde{x}_L - (1 - g_1)\tilde{x}_1 = \sum_{j=1}^{L} g_j\tilde{x}_j - \tilde{x}_1 = y - \tilde{x}_1.$$

Тогда

$$\frac{\Delta y}{y} \le \left|\frac{\Delta g}{g}\right| \frac{y - \tilde{x}_1}{y}$$

Очевидно, что приведенные выше выкладки можно провести для любого весового коэффициента g_j, а не только для g_1. Тогда полученный результат можно представить в окончательном виде

$$\frac{\Delta\tilde{\tilde{x}}}{\tilde{\tilde{x}}} \le \left|\frac{\Delta g}{g}\right| \frac{\tilde{\tilde{x}} - \tilde{x}_j}{\tilde{\tilde{x}}}$$

Следовательно, погрешность взвешенного среднего арифметического, обусловленная погрешностью определения весов, во много раз меньше последней. Сомножитель $(\tilde{\tilde{x}} - \tilde{x}_j)/\tilde{\tilde{x}}$ можно считать имеющим порядок относительной погрешности слагаемых. Так, если эта погрешность имеет порядок 0,01, то погрешность среднего взвешенного из-за погрешности определения весов будет в 100 раз меньше последней.

§ 4.4 Использование понятия веса в задачах оценки точности результатов косвенных измерений

Ранее понятие неравноточных измерений было использовано при формировании оценок значения измеряемой величины по совокупности результатов измерений, обладающих различными погрешностями. Было введено понятие веса измерения, отражающего вклад этого результата в формирование оценки. Более точный результат обладает большим весом. Чтобы подчеркнуть особенность рассмотренных задач, еще раз отметим, что пока речь шла о неравноточных измерениях одной и той же физической величины (расстояния между двумя фиксированными точками, угла между двумя фиксированными направлениями). Характерной особенностью таких задач является возможность введения нормированного веса результата измерения. Алгоритмы формирования оценок по результатам неравноточных измерений оказались таковыми, что обеспечивали «автоматическую» нормировку весов измерений, составляющих обрабатываемую совокупность результатов.

Чтобы наметить путь дальнейшего развития идеи неравноточных измерений, обратим внимание на то, что формируемая оценка (например, взвешенное среднее арифметическое) является функцией значений результатов измерений $\tilde{x}(x_1,\dots,x_n)$, то есть обработка любых (равноточных или неравноточных) измерений, по сути, представляет собой обработку косвенных измерений величин $x_1,\dots,x_n$. Это же обстоятельство позволило подойти к вопросу оценивания точности многократных измерений с использованием правила $s_{\tilde{x}}^2 = \sum_{i=1}^{n} (\partial f / \partial x_i)^2 s_i^2$, применяемого для определения дисперсии результата косвенных измерений.

Поэтому, если рассматривать вес в качестве линейной меры точности любого результата измерений, понятие неравноточных измерений может быть распространено на случай измерений величин, представляющих любые функции от измеренных величин.

Следует подчеркнуть, что в этом случае нормировка веса теряет свое естественное обоснование. Вес вводится как величина, пропорциональная точности результата измерения, связанная с дисперсией этого результата соотношением

$$q_i = \frac{K}{s_i^2},$$

где $K \geq 0$ – любое число, отражающее значимость результата измерения x_i. Тогда ряд однородных величин $x_1, x_2, \dots, x_n$, измеренных с погрешностями, характеризуемыми дисперсиями

$$s_1^2 < s_2^2 < \ldots < s_n^2,$$

будет обладать весами

$$q_1 > q_2 > \ldots > q_n.$$

Очевидно, что необходимость сопоставления точности результатов в выбранном ряду $x_1, x_2, \ldots, x_n$ требует использования при формировании весов этих результатов одного значения коэффициента $K_i = K$. Следовательно, все веса одного ряда измерений можно одновременно увеличивать или уменьшать в одинаковое число раз. Вполне разумным представляется выбор в качестве значения коэффициента значения дисперсии одного из результатов ряда $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть это будет x_i, тогда

$$q_1 = \frac{s_i^2}{s_1^2},\ q_2 = \frac{s_i^2}{s_2^2}, \ldots,\ q_i = \frac{s_i^2}{s_i^2} = 1, \ldots,\ q_n = \frac{s_i^2}{s_n^2}.$$

Формальный выбор из ряда некоторого результата измерения x_i (реального или воображаемого) с дисперсией s_i^2 для определения размера коэффициента как $K = s_i^2$ равносилен принятию веса этого результата за единицу ($q_i = 1$).

Часто среднеквадратическое отклонение результата измерения, обладающего весом $q_i = 1$, называют среднеквадратическим отклонением единицы веса ($s_x = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{s_i^2}$), а приближенное значение $\tilde{s}_x$ (оценку s_x по выборке конечного объема) – среднеквадратической погрешностью единицы веса.

Примечательно, что в рамках концепции, опирающейся на использование для характеристики неравноточных измерений ненормированных весов q_i, результаты равноточных измерений x_i, обладающие одинаковыми дисперсиями ($s_i^2 = s^2$), будут иметь одинаковые веса $q_i = q$, которые можно принять равными единице, то есть $q_i = 1$. Но и при таком определении веса каждого отдельного измерения вес оценки в виде среднего арифметического $\tilde{x} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i$ будет в n раз больше, чем вес каждого результата измерения

$$q_{\tilde{x}} = \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n} q_i^{-1}} = \frac{n^2}{q^{-1}\sum_{i=1}^{n} 1} = \frac{n^2}{n} q = nq = n .$$

Очевидно, что если вес каждого равноточного измерения равен единице, то соответствующий вес среднего арифметического равен числу измерений:

$$q_{\tilde{x}} = n .$$

В общем случае, когда измеряемая величина y является функцией $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ величин $x_1, x_2, ..., x_n$, измеренных с погрешностями, характеризуемыми дисперсиями $s_1^2, s_2^2, ..., s_n^2$, в результате применения правила

$$s_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 s_i^2$$

вес $q_y \sim s_y^{-2}$ величины y связан с весами $q_i \sim s_i^{-2}$ величин x_i соотношением

$$\frac{1}{q_y} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \frac{1}{q_i} .$$

Для функции $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, представляющей собой однородную функцию аргументов, то есть $f(lx_1, ..., lx_n) = l f(x_1, ..., x_n)$, $l \geq 0$, справедливо соотношение

$$l^2 s_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 l^2 s_i^2 .$$

Следовательно, вес такой функции и веса всех аргументов являются безразмерными величинами. К данной группе функций относятся все аддитивные функции $y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ и функции более общего вида $y = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^k \right)^{1/k}$, где k – любое действительное число. Во всех других случаях ситуация становится более сложной, так как вес функции и веса аргументов приобретают размерность. Это необходимо тщательно учитывать при обработке результатов.

Рассмотрим некоторые следствия из формулы

$$q_y^{-1} = \sum_{i=1}^{n} (\partial f / \partial x_i)^2 q_i^{-1}.$$

Пусть задана линейная функция $y = cx$. Веса величин y и x связаны соотношением

$$q_y^{-1} = c^2 q_x^{-1} \text{ или } q_y = c^{-2} q_x.$$

Применив это равенство к функции $u = \sqrt{q_i} x_i$, где x_i – результат i-го измерения; q_i – его вес, получим

$$q_u = \frac{q_i}{\left(\sqrt{q_i}\right)^2} = \frac{q_i}{q_i} = 1.$$

Следовательно, если умножить результат измерений на корень квадратный из его веса, то вес произведения $\sqrt{q_i} x_i$ будет равен единице, а его среднеквадратическое отклонение – среднеквадратическому отклонению единицы веса s_x.

Из пропорции $s_y^2 / s_x^2 = q_y^{-1}$ (или $s_x^2 / s_y^2 = q_y$) найдем, что

$$s_y^2 = s_x^2 / q_y \text{ или } s_y = \frac{s_x}{\sqrt{q_y}}.$$

Таким образом, чтобы найти среднеквадратическую погрешность результата измерения или его функции, достаточно среднеквадратическое отклонение единицы веса разделить на корень квадратный из значения веса этого результата или его функции.

Расмотрим пример расчета веса функции нескольких переменных, важный для геодезических приложений. Пусть функция h является аддитивной функцией трех аргументов x, y, z, измеренных с погрешностями, имеющими дисперсии s_x^2, s_y^2, s_z^2:

$$h = \pm ax \pm by \pm cz,$$

где a, b, c – постоянные коэффициенты.

Тогда вес q_h функции h связан с весами аргументов q_x, q_y, q_z соотношением

$$s_h^2 = (\partial h / \partial x)^2 s_x^2 + (\partial h / \partial y)^2 s_y^2 + (\partial h / \partial z)^2 s_z^2 = a^2 s_x^2 + b^2 s_y^2 + c^2 s_z^2.$$
$$= a^2 / q_x + b^2 / q_y + c^2 / q_z$$

В случае произвольного числа n аргументов x_i, $i=\overline{1,n}$ аддитивной функции $h=\sum_{i=1}^{n}(\pm a_i)x_i$, где a_i – постоянный коэффициент при переменной x_i, аналогичное соотношение имеет вид

$$\frac{1}{q_h}=\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}\frac{1}{q_{x_i}},$$

где q_{x_i} – вес изменения x_i.

Часто встречается ситуация когда все коэффициенты слагаемых аддитивной функции $a_i=1$. В этом случае формула для расчета веса функции h имеет вид

$$\frac{1}{q_h}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q_{x_i}}$$

или

$$q_h=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q_{x_i}}}.$$

Если $h=nx$ и измерения x_i равноточные ($q_{x_i}=q$), то

$$q_h=\frac{q}{n},$$

то есть вес суммы равноточных слагаемых обратно пропорционален числу слагаемых, а тем самым – значению величины h.

В практике геодезических измерений этому правилу подчиняются:

- вес суммы углов теодолитного хода, который обратно пропорционален количеству углов данного хода;
- вес суммы линейных измерений вытянутого полигонометрического хода, который обратно пропорционален длине хода;
- вес превышения нивелирного хода, проложенного в равнинной местности, который также обратно пропорционален длине хода.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определения понятий «равноточные» и «неравноточные» измерения?

2. В чем заключаются особенности измерения величины x по совокупности результатов измерения величины $y=f(x)$ в ус-

ловиях, когда не все измерения одинаково «ценны» для получения окончательного результата. Что такое «квазисреднее»? Приведите примеры для частных случаев вида функциональной зависимости $y = f(x)$.

3. Дайте определение понятию «вес измерения». Что такое «нормированный вес»? Каким весом обладают результаты равноточных измерений?

4. Какова максимально правдоподобная оценка по результатам прямых неравноточных измерений величины, распределенной по нормальному закону? Как в этом случае вес связан с дисперсией результата измерения?

5. Запишите аналитическую зависимость для расчета дисперсии взвешенного среднего степенного. Как она будет выглядеть для случаев определения дисперсии взвешенного среднего арифметического и невзвешенного среднего арифметического?

6. В чем заключается наиболее используемый способ объединения результатов измерений одной и той же величины, выполненных в разное время с использованием различных средств измерений? Запишите выражение для оценки дисперсии совокупного среднего по конечному числу результатов измерений в каждой серии.

7. Нужно ли при формировании оценки в виде взвешенного среднего арифметического определять веса измерений с той же точностью, что и каждый отдельный результат измерения?

8. Как используют понятие веса в задачах оценки точности результатов косвенного измерения? Запишите общее выражение для веса функции с использованием значений весов величин-аргумертов.

9. Как вводится понятие «среднеквадратическое отклонение единицы веса»? Как найти среднеквадратическую погрешность результата измерения или его функции по известному значению среднеквадратического отклонения единицы веса?

10. Какие значения ненормированных весов обычно присваиваются результатам равноточных измерений? Как они изменяются, если использовать нормированные веса?

11. Рассчитайте вес функции $h = \pm ax \pm by \pm cz$, если известны веса величин-аргумернов q_x, q_y, q_z. Как изменится вес этой функции при равных значениях весов $q_x = q_y = q_z$?

12. Измерены три величины x, y, z с известными весами q_x, q_y, q_z. Определите вес величины w, если она связана с величинами x, y, z следующими соотношениями:

$$w = 2(x+y) + z^4,$$

$$w = \frac{7x^2}{z^3} + \ln y,$$

$$w = \frac{\sin x + \cos y}{e^{3z}}.$$

13. Чему равен вес суммы углов теодолитного хода? Вес суммы линейных измерений вытянутого полигонометрического хода? Вес превышения нивелирного хода, проложенного в равнинной местности?

Список литературы к главе 4

1. Ананченко В.Н. Теория измерений: учебное пособие / В.Н. Ананченко, Л.А. Гофман. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2002. – 214 с.

2. Большаков В.Д. Теория ошибок наблюдений: учебник для вузов / В.Д. Большаков. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1983. – 223 с.

3. Гайдаев П.А. Теория математической обработки геодезических измерений / П.А. Гайдаев, В.Д. Большаков. – М.: Недра, 1969. – 400 с.

4. Гайдышев И.П. Анализ и обработка данных : специальный справочник / И.П. Гайдышев. – СПб.: Питер, 2001. – 752 с.

5. Куштин И.Ф. Геодещия: обработка результатов измерений: учебное пособие / И.Ф. Куштин. – М.: ИКЦ «МарТ», 2006. – 288 с.

6. Мудров В.И. Методы обработки измерений (квазиправдоподобные оценки) / В.И. Мудров, В.Л. Кушко. – М.: Советское радио, 1983. – 304 с.

7. Рабинович С.Г. Погрешности измерений / С.Г. Рабинович. – Л.: Энергия, 1978. – 262 с.

8. Buonaccorsi J.P. Measurement error: models, methods, and applications. – New York: Chapman & Hall/CRC interdisciplinary statistics series, 2010. – 438 p.

Глава 5
Обработка результатов совместных и совокупных измерений

§ 5.1 Особенности совместной обработки результатов измерений нескольких величин

Пусть имеется некоторая функция $y = f(x_1,...,x_m)$, отражающая связь величины y и величин $x_1,...,x_m$, где m – число аргументов функции y. Эту зависимость можно записать в виде $y - f(x_1,...,x_n) = 0$. Фактически, если известны точные значения величин $y, x_1, ..., x_m$ и вид функции f, любую из величин $y, x_1, ..., x_m$ можно выразить через все оставшиеся. Этот факт отражает неявная форма записи исходной функции

$$j\,(y, x_1,...,x_m) = 0\,.$$

Эта запись функциональной связи величин отражает тот факт, что любое изменение значения одной из величин неизбежно влечет изменения всех других (или хотя бы части из них).

Наличие функциональной связи $j\,(y, x_1,...,x_m) = 0$ приводит к трем типам задач.

К задачам ***первого типа*** относятся задачи определения одной или нескольких неизвестных величин из совокупности $y, x_1, ..., x_m$ по известным значениям других величин, входящих в эту совокупность, на основе их известных функциональных связей. Если предположить, что известные и неизвестные величины находятся в причинно-следственных отношениях, то в рамках данного типа задач возникают ***прямые задачи***, если известны причины, а неизвестны следствия, и ***обратные задачи***, если, наорот, известны следствия, а неизвестны причины. Примером прямой задачи является определение одной неизвестной величины (пусть это будет величина y), представленной в виде известной функции $y = f(x_1,...,x_m)$. К такого рода задачам относятся задачи обработки косвенных измерений. Обработка прямых измерений, когда величины $x_1, ..., x_m$ являются реализациями одной и той же случайной величины x, а величина $y = \tilde{x}$ – оценкой истинного значения величины x, также входит в эту группу задач.

Ко ***второму типу*** относятся задачи уточнения вида функциональной зависимости $j\,(y, x_1,..., x_m) = 0$ по известным значениям величин $y, x_1,..., x_m$. Обычно речь идет об уточнении параметров функциональной зависимости для известного класса функций. Такие задачи обычно называют ***задачами аппроксимации***. Если значения величин $y, x_1,..., x_m$ известны точно, то решение данной задачи носит тривиальный характер. Однако при обработке данных измерений величин $y, x_1,..., x_m$, отличающихся от истинных значений вследствие неизбежных погрешностей, решение подобных задач требует применения специальных приемов.

Рассмотрим функциональную зависимость $j\,(y, x_1,..., x_m) = 0$. Для того чтобы подчеркнуть возможность корректировки вида этой зависимости по результатам измерений величин $y, x_1,..., x_m$, запишем ее в виде $j\,(y, x_1,..., x_m; a_0,..., a_m) = 0$, где $a_0,..., a_m$ – коэффициенты, определяющие различия функций $y = f(x_1,..., x_m)$ в рамках заданного семейства функций. Пусть $\{y_i\}_1^n$, $\{x_{1i}\}_1^n$,…, $\{x_{mi}\}_1^n$ – множества результатов совместных измерений величин $y, x_1,..., x_m$. По результатам этих измерений может быть построена система n условных уравнений:

$$j\,(y_1, x_{11},..., x_{m1}; a_0,..., a_m) = n_1;$$

$$j\,(y_2, x_{12},..., x_{m2}; a_0,..., a_m) = n_2;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

$$j\,(y_n, x_{1n},..., x_{mn}; a_0,..., a_m) = n_n.$$

Если бы результаты измерений $y_i, x_{1i},..., x_{mi}$ были строго равны истинным значениям величин $y, x_1,..., x_m$, то все уравнения выродились бы в одно уравнение $j\,(y, x_1,..., x_m; a_0,..., a_m) = 0$. Однако вследствие наличия погрешностей измерений левые части всех уравнений отличаются друг от друга, а их правые части не равны нулю. Величины n_i, стоящие в правых частях уравнений, называют ***невязками***. Устранить (или уменьшить) невязки можно путем правильного выбора параметров $a_0,..., a_m$. Эти параметры в рассматриваемой системе уравнений являются неизвестными.

Решение этой системы может быть найдено, если число уравнений будет не менее числа неизвестных $n \geq m+1$. При этом решение может быть найдено лишь приближенное, удовлетворяющее некоторому критерию. В качестве такого критерия часто используют сумму квадратов невязок, а решение ищут из условия достижения минимума этим критерием, то есть методом наименьших квадратов.

Третий тип задач также связан с обработкой данных совместных измерений всей совокупности величин $y, x_1, ..., x_m$. При этом вид функциональной зависимости уточнению не подлежит, так как определяется некими внешними условиями, часто закономерностями фундаментального характера. Единственный путь согласования в рамках незыблемой модели функциональной связи величин $y, x_1, ..., x_n$, результатов измерений, полученных с погрешностями, связан с введением ***поправок*** к полученным значениям величин. Введение таких поп»равок приводит к тому, что исправленные результаты в большей степени соответсвуют теоретической модели их функциональной связи, по сравнению с исходными значениями. Фактически введение поправок регулирует смещение результатов измерений относительно истинных значений. Эту процедуру называют ***уравновешиванием*** или ***уравниванием*** результатов измерений, а весь третий тип задач – ***задачами уравнивания*** результатов.

В этом случае система условных уравнений имеет вид

$$j\,(y_1 - z_0, x_{11} - z_1, ..., x_{m1} - z_m) = n_1;$$

$$j\,(y_2 - z_0, x_{12} - z_1, ..., x_{m2} - z_m) = n_2;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$j\,(y_n - z_0, x_{1n} - z_1, ..., x_{mn} - z_m) = n_n.$$

Устранить (или уменьшить) невязки условных уравнений можно путем правильного выбора поправок $z_0, ..., z_m$. Эти поправки в рассматриваемой системе уравнений являются неизвестными. Решение этой системы может быть найдено, если число уравнений не менее числа неизвестных $n \geq m+1$. При этом решение может быть найдено также лишь приближенное, удовлетворяющее некоторому критерию. В качестве такого критерия и в этой группе задач часто используют сумму квадратов невязок, а решение ищут из условия достижения минимума этим критерием, то есть методом наименьших квадратов.

При совместной обработке результатов геодезических измерений могут возникать задачи второго типа (аппроксимации), а особенно часто – задачи третьего типа, то есть задачи уравнивания. Примечательно, что задачи аппроксимации могут быть трансформированы в задачи уравнивания и наоборот. Покажем это на простом примере линейной функции $y = \sum_{t=1}^{3} x_t = x_1 + x_2 + x_3$.

Пусть x_t – значения углов в треугольнике, тогда система условных уравнений для задачи второго типа имеет вид ($i = \overline{1, n}$)

$$a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i} + a_3 x_{3i} - 180 = n_i .$$

Если обозначить $a_t = 1 + z_t / x_t$, $t = 1, 2, 3$, то система условных уравнений преобразуется к виду

$$x_{1i} + z_1 + x_{2i} + z_2 + x_{3i} + z_3 - 180 = n_i .$$

Здесь z_t – соответствующие поправки к измеренным значениям углов треугольника. Таким образом, условное уравнение, характерное для задач аппроксимации, трасформировалось в условное уравнение для задач уравнивания.

§ 5.2 Определение параметров линейной функции

Рассмотрим задачу совместной обработки результатов измерений двух величин y и x, связанных линейной зависимостью общего вида

$$y = ax + b .$$

где a, b – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению по совокупности полученных результатов измерений, включающие множества $\{y_i\}_1^n$, $\{x_i\}_1^n$.

Составим систему условных уравнений:

$$y_i - ax_i - b = n_i ,\ i = \overline{1, n},\ n \geq 2 .$$

Решение системы условных уравнений будем искать при выполнении следующего условия:

$$\sum_{i=1}^{n} n_i^2 \to \min .$$

Требование поиска решения в условиях, когда сумма квадратов невязок условных уравнений принимает минимальное значение является следствие применения для решения задачи ***метода наименьших квадратов***. Ранее была рассмотрена возможность применения этого метода при решении задач обработки прямых (непосредственных) и косвенных измерений. При этом было доказано совпадение оценок, полученных методом наименьших квадратов и максимального правдоподобия при условии нормального закона распределения результатов измерений. Рассмотрим возможность его применения при обработке результатов совместных измерений на примере двух величин y и x, связанных линейной зависимостью.

Возведем правые и левые части сформированных условных уравнений в квадрат и просуммируем преобразованные уравнения

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2 = \sum_{i=1}^{n} n_i^2 .$$

Следовательно, условие достижения минимума суммой квадратов невязок эквивалентно минимизации функционала $S = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2 \to \min$$

Функционал S – квадратичная функция параметров a, b, следовательно, она непрерывна и дифференцируема в области экстремума (рисунок 5.1). Поэтому поиск экстремума (минимума) осуществляют путем приравнивания нулю частных производных S по неизвестным параметрам a, b, решая систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial a}\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2 = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial b}\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2 = 0.$$

После дифференцирования получим

$$-2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)x_i = 0,$$

$$-2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b) = 0.$$

Тождественные преобразования приводят к окончательному следующему виду системы уравнений:

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,,$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i - bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \,.$$

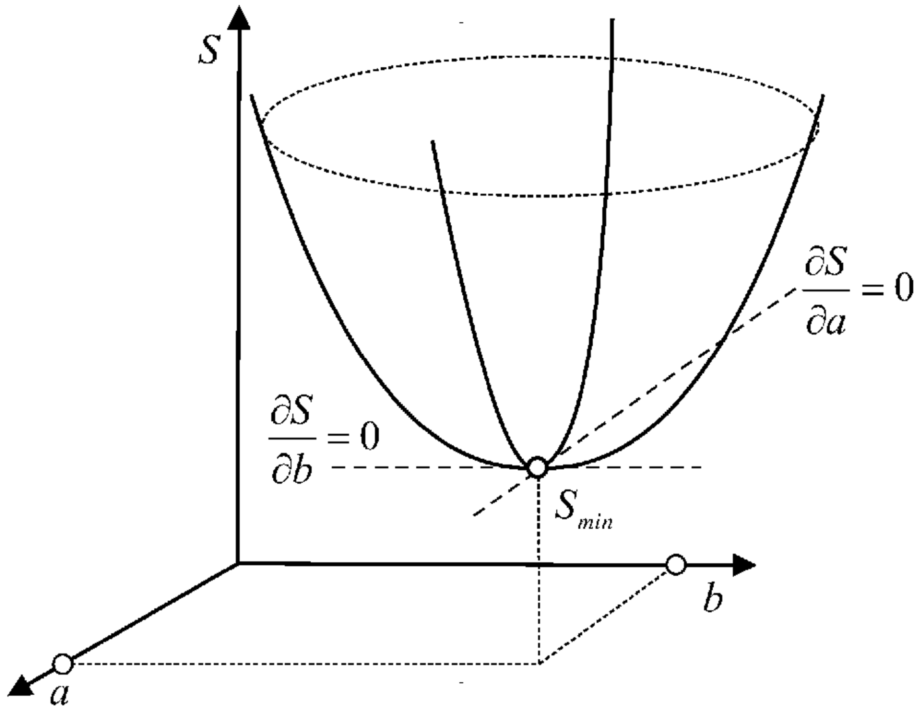


Рис. 5.1. Схема, иллюстрирующая процедуру поиска минимума функционала $S = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$

В результате получена система двух линейных уравнений с двумя неизвестными a и b.

Решая эту систему уравнений, например, методом Крамера, получают значения параметров a и b, определяющие положение оптимальной линейной зависимости, «наилучшим образом» соответсвующей данным измерений. Для этого строят определители системы

$$D=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \sum_{i=1}^{n}x_i\\ \sum_{i=1}^{n}x_i & n\end{bmatrix},\ D_a=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i & \sum_{i=1}^{n}x_i\\ \sum_{i=1}^{n}y_i & n\end{bmatrix},\ D_b=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \sum_{i=1}^{n}x_iy_i\\ \sum_{i=1}^{n}x_i & \sum_{i=1}^{n}y_i\end{bmatrix},$$

а с их помощью рассчитывают значения параметров a и b:

$$a=\frac{D_a}{D}=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2},\ b=\frac{D_b}{D}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}.$$

На рисунке 5.2 представлена найденная в процессе решения задачи оптимальная линейная зависимость $y=ax+b$ (обозначена пунктирной линией, пересекающей ось абсцисс в точке $x=-b/a$ под углом $j=arctg\,a$). Прямая «наилучшим образом» пересекает окрестности точек (обозначенных черными кружками) с координатами (x_i, y_i), соответствующими парам результатов согласованных измерений величин y и x. Невязки условных уравнений n_i для каждой пары результатов обозначены вертикальными отрезками, соединяющими экспериментальные точки с найденной линией $y=ax+b$. Символами $\hat{y}_i$ обозначены «исправленные» значения величины y, лежащие на найденной прямой.

Метод наименьших квадратов, использованный для получения оптимальной линейной зависимости величин x, y по результатам их совместных измерений напрямую не опирается на какие-либо вероятностные представления. Поэтому целесообразно сопоставить результаты, полученные этим методом и методом максимального прадоподобия. Пусть (как и ранее) имеется n парных измерений величин x, y: $\{x_i, y_i\}_1^n$, где $i=\overline{1,n}$. По данным измерений необходимо найти оценки параметров a и b, а также оценки их дисперсий s_a^2 и s_b^2. О статистических свойствах результатов измерений и их погрешностей сделаем следующие предположения.

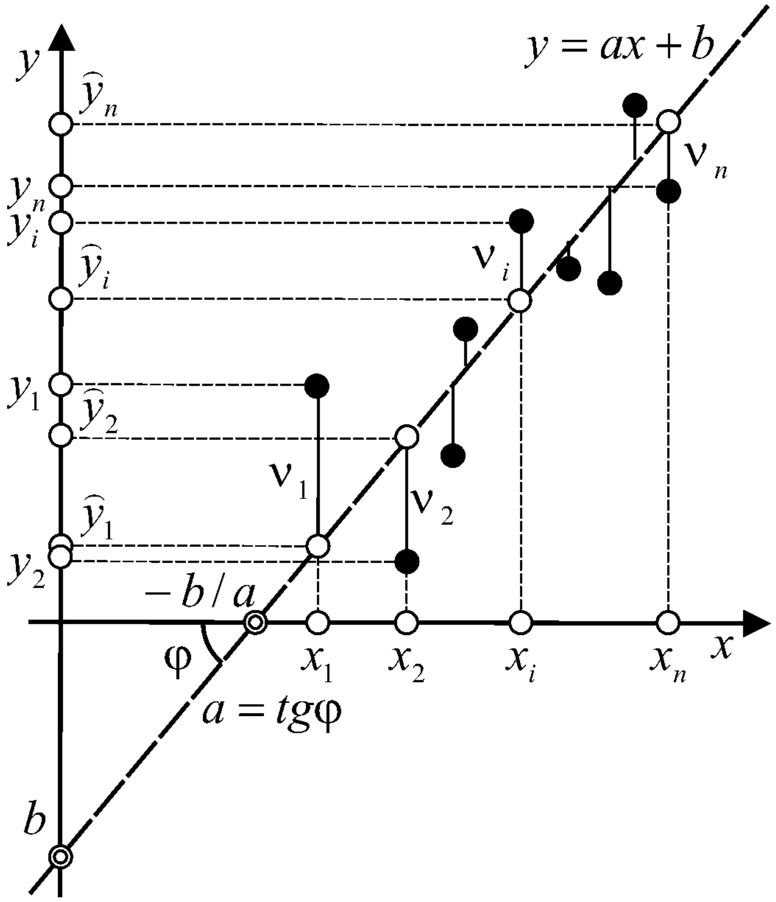


Рис. 5.2. – Схематическое представление найденной оптимальной линейной зависимости, «наилучшим образом» отражающей результаты совместных измерений величин y и x

1. Значения x_i известны точно, т.е. без погрешностей.

При обработке данных реальных измерений такое предположение вряд ли будет выполняться. Скорее всего, погрешности Δx_i распределены по нормальному закону и могут быть пересчитаны в погрешности Δy_i. Это приведет к увеличению дисперсии распределения величин y_i, что должно учитываться в процессе обработки данных. Далее будет доказана справедливость таких соображений, а поэтому не будет ошибочным полагать x_i известными точно.

2. Распределения величин y_i взаимно независимы, имеют одну и ту же дисперсию s^2 и отвечают нормальному закону. Распределения y_i имеют математические ожидания $\widehat{y}_i$, которые

совпадают с точным значением функции $ax_i + b$. Это предположение иллюстрирует рисунок 5.3.

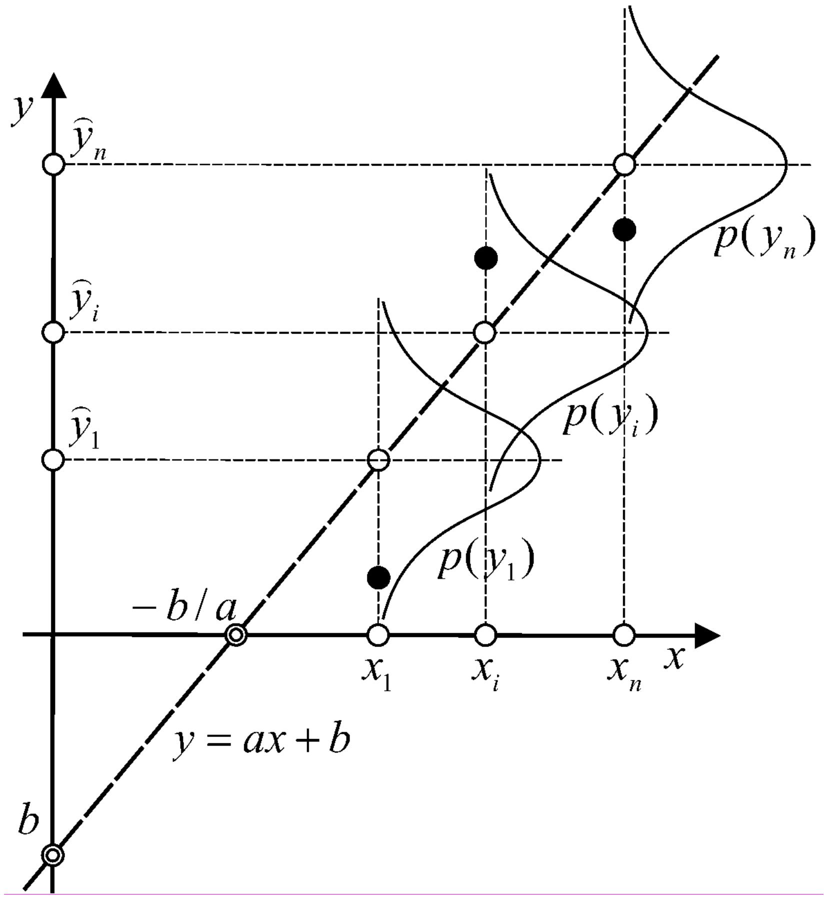


Рис. 5.3. Схематическое представление найденной оптимальной линейной зависимости как линии, соединяющей точки, в которых величина y принимает значение математического ожидания $\widehat{y}_i$, связанного с соответствующим значением x_i

Распределение плотности вероятности величины y_i вокруг точного значения $ax_i + b$ определяет выражение:

$$p(y_i) = \frac{1}{s\sqrt{2p}} \exp\left\{ -\frac{[y_i - (ax_i + b)]^2}{2s^2} \right\}.$$

Вследствие взаимной независимости значений y_i, называемой функцией правдоподобия, определяют как произведение плотностей вероятностей распределений отдельных измерений:

$$L(y_1, y_2, ..., y_n) = \prod_{i=1}^{n} p(y_i) =$$

$$=\left(\frac{1}{s\sqrt{2p}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2s^2}\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]^2\right\}.$$

Натуральный логарифм функции прадоподобия равен

$$\ln L=-\frac{n}{2}\ln(2p)-\frac{n}{2}\ln s^2-\frac{1}{2s^2}\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-(ax_i+b)\right]^2$$

Оценками $a,\ b,\ s^2$ являются значения, при которых L и соответственно $\ln L$ достигают максимума, т.е. реализуется наибольшая вероятность получения совокупности данных результатов измерений. Экстремум функции $\ln L$ находят с использованием следующих соотношений:

$$\partial\ln L/\partial a=0,\quad \partial\ln L/\partial b=0,\quad \partial\ln L/\partial s^2=0$$

Система уравнений относительно искомых параметров примет вид:

$$\sum_{i=1}^{n}[x_i(y_i-ax_i-b)]=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)=0,$$

$$ns^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)^2$$

Два первых уравнения есть не что иное, как рассмотренное выше условие достижения минимума функционалом

$$S=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]^2.$$

Решение системы этих уравнений было уже получено:

$$a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2},\quad b=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}.$$

Третье уравнение дает наиболее эффективную оценку дисперсии распределений $p(y_i)=\frac{1}{s\sqrt{2p}}\exp\left\{-\frac{[y_i-(ax_i+b)]^2}{2s^2}\right\}$. Если, как и ранее, предпочесть эффективной, но смещенной, оценке дисперсии чуть менее эффективную, но не смещенную, то оценка дисперсии будет определяться следующим соотношением:

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\left\{ n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 - \frac{\left(n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \right\}.$$

Оценим теперь дисперсии параметров. Преобразуем выражение для a:

$$a = \sum_{j=1}^{n} k_j y_j, \quad k_j = \frac{x_j - \tilde{x}}{\sum_{j=1}^{n} (x_j - \tilde{x})^2}, \quad \tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Параметр a удалось представить как линейную комбинацию (взвешенную сумму) взаимно независимых величин y_j, так как коэффициенты (веса) k_j заданы точно (как следует из первого предположения о статистических свойствах величин x, y. Следовательно, параметр a распределен по нормальному закону, а его дисперсия s_a^2 представляет собой линейную комбинацию дисперсий величин y_j с коэффициентами k_j^2. Это свойство сложения нормальных распределений широко используется при анализе погрешностей косвенных измерений. Тогда

$$s_a^2 = \sum_{j=1}^{n} k_j^2 s^2 = \frac{n s^2}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

Рассмотрим дисперсию параметра b. Аналогичным образом преобразуем выражение для расчета значения этого параметра:

$$b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - a\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Этот параметр также распределен нормально. Его дисперсия

$$s_b^2 = \frac{s^2}{n} + (\tilde{x})^2 s_a^3 .$$

Выразим связь s^2 с дисперсией s_a^2

$$s^2 = s_a^2 \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n(\tilde{x})^2 \right].$$

Подставляя его в выражение для s_b^2, получим

$$s_b^2 = \frac{s_a^2}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 .$$

Иногда при обработке результатов измерений линейно зависимых величин необходимо найти координату точки пересечения графиком $y = ax + b$ оси x

$$c = -\frac{b}{a}.$$

Соответствующая дисперсия рассчитывается по формуле для определения дисперсии мультипликативной функции

$$s_c^2 = c^2 (s_a^2 / a^2 + s_b^2 / b^2).$$

Проведенный анализ показывет, что метод наименьших квадратов и в случае обработки результатов совместных измерений имеет вполне надежное статистическое обоснование при условии, что измеряемые ***пары величин*** распределены по нормальному закону. Поэтому формулы, полученные с использованием метода максимального правдоподобия, вполне применимы для оценки качества решений, полученных методом наименьших квадратов.

§ 5.3 Общая схема применения метода наименьших квадратов при обработке совместных измерений

Рассмотренная в §5.2 процедура решения задачи совместной обработки результатов измерений двух физических величин, связанных зависимостью $y = ax + b$, продемонстрировала, что метод наименьших квадратов удобно применять в случае линейной зависимости измеряемых величин.

Рассмотрим порядок решения задачи совместной обработки результатов измерения $m > 2$ связанных линейно величин $x, y, z, \ldots, w$:

$$ax + by + cz + \ldots + kw = h,$$

где $a, b, c, \ldots, k$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению; h – свободный член. Коэффициенты $a, b, c, \ldots, k$ определяют по совокупности полученных результатов совместных измерений величин $x, y, z, \ldots, w$, включающих m множеств: $\{x_i\}_1^n, \{y_i\}_1^n, \{z_i\}_1^n, \ldots, \{w_i\}_1^n$, $i=\overline{1,n}$. С учетом того, что результаты измерения величин $x, y, z, \ldots, w$ вследствие наличия погрешностей никогда не равны истинным значениям, можно сформировать систему условных уравнений

$$ax_i + by_i + cz_i + \ldots + kw_i - h_i = n_i,$$

где n_i – невязка i-ого условного уравнения, $i=\overline{1,n}$, $n \geq m$.

Тогда, применяя метод наименьших квадратов, находим оптимальное приближенное решение этой системы уравнений, минимизируя сумму квадратов невязок n_i, что эквивалентно минимизации функционала $S = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + by_i + cz_i + \ldots + kw_i - h_i)^2$

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i + by_i + cz_i + \ldots + kw_i - h_i)^2 \to \min$$

Функционал S – квадратичная функция параметров $a, b, c, \ldots, k$. Такие функции непрерывны и дифференцируемы в области экстремума. Поэтому поиск экстремума (минимума) осуществляют путем приравнивания нулю частных производных S по неизвестным параметрам $a, b, c, \ldots, k$, решая систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial a}\sum_{i=1}^{n}(ax_i + by_i + cz_i + \ldots + kw_i - h_i)^2 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\sum_{i=1}^{n}(ax_i + by_i + cz_i + \ldots + kw_i - h_i)^2 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial c}\sum_{i=1}^{n}(ax_i + by_i + cz_i + \ldots + kw_i - h_i)^2 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial k}\sum_{i=1}^{n}(ax_i + by_i + cz_i + \ldots + kw_i - h_i)^2 = 0.$$

После дифференцирования и деления правой и левой части каждого уравнения на постоянную величину (–2) получим

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i + by_i + cz_i + ... + kw_i - h_i)x_i = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i + by_i + cz_i + ... + kw_i - h_i)y_i = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i + by_i + cz_i + ... + kw_i - h_i)z_i = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i + by_i + cz_i + ... + kw_i - h_i)w_i = 0.$$

Отсюда получаем систему так называемых ***нормальных уравнений***:

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + c\sum_{i=1}^{n} x_i z_i + ... + k\sum_{i=1}^{n} x_i w_i = \sum_{i=1}^{n} x_i h_i,$$
$$a\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + b\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} y_i z_i + ... + k\sum_{i=1}^{n} y_i w_i = \sum_{i=1}^{n} y_i h_i,$$
$$a\sum_{i=1}^{n} x_i z_i + b\sum_{i=1}^{n} y_i z_i + c\sum_{i=1}^{n} z_i^2 + ... + k\sum_{i=1}^{n} z_i w_i = \sum_{i=1}^{n} z_i h_i,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a\sum_{i=1}^{n} x_i w_i + b\sum_{i=1}^{n} y_i w_{ii} + c\sum_{i=1}^{n} z_i w_i + ... + k\sum_{i=1}^{n} w_i^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i h_i$$

При написании нормальных уравнений часто пользуются обозначениями Гаусса или так называемыми «скобками Гаусса»:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = [xx],\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = [xy],\ \sum_{i=1}^{n} x_i z_i = [xz],\ \sum_{i=1}^{n} x_i w_i = [xw],\ \sum_{i=1}^{n} x_i h_i = [xh].$$

Очевидно, что $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$, то есть $[xy] = [yx]$. Аналогично $[xz] = [zx]$, $[xw] = [wx]$ и так далее.

Обозначая подобным образом все суммы, входящие в систему нормальных уравнений, получим

$$a[xx] + b[xy] + c[xz] + ... + k[xw] = [xh],$$
$$a[xy] + b[yy] + c[yz] + ... + k[yw] = [yh],$$
$$a[xz] + b[yz] + c[zz] + ... + k[zw] = [zh],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a[xw] + b[yw] + c[zw] + ... + k[ww] = [wh].$$

Особенностью системы нормальных уравнений является то, что она объединяет столько уравнений, сколько неизвестных коэффициентов $a, b, c, ..., k$ необходимо определить, то есть система нормальных уравнений – система m линейных уравнений с m неизвестными. Если эта система хорошо обусловлена, то есть в ее составе отсутствуют уравнения, представляющие линейные комбинации других уравнений системы, то решение будет единственным.

Систему нормальных уравнений можно записать в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} [xx] & [xy] & [xz] & \ldots & [xw] \\ [xy] & [yy] & [yz] & \ldots & [yw] \\ [xz] & [yz] & [zz] & \ldots & [zw] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [xw] & [yw] & [zw] & \ldots & [ww] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ \ldots \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [xh] \\ [yh] \\ [zh] \\ \ldots \\ [wh] \end{bmatrix}.$$

Матрица, составленная из «скобок Гаусса, стоящих рядом с неизвестными коэффициентами уравнений нормальной системы, обладает двумя важными свойствами коэффициентов, неизвестных в этой системе уравнений:

- эти матрицы симметричны относительно главной диагонали;
- все элементы, стоящие на главной диагонали, положительны.

Нормальная система уравнений может быть решена любым известным способом решения систем линейных уравнений. Мы будем использовать для этого метод Крамера, ограничив число неизвестных коэффициентов до трех и тем самым уменьшив число уравнений в системе также до трех. Тогда получим систему нормальных уравнений вида

$$\begin{bmatrix} [xx] & [xy] & [xz] \\ [xy] & [yy] & [yz] \\ [xz] & [yz] & [zz] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [xh] \\ [yh] \\ [zh] \end{bmatrix}.$$

Определители этой системы имеют вид

$$D = \begin{Vmatrix} [xx] & [xy] & [xz] \\ [xy] & [yy] & [yz] \\ [xz] & [yz] & [zz] \end{Vmatrix} =$$

$$= [xx][yy][zz] + 2[xy][yz][xz] - [xz]^2[yy] - [xy]^2[zz] - [yz]^2[xx],$$

$$D_a = \begin{Vmatrix} [xh] & [xy] & [xz] \\ [yh] & [yy] & [yz] \\ [zh] & [yz] & [zz] \end{Vmatrix} =$$

$$= [xh][yy][zz] + [xy][yz][zh] + [yh][yz][xz] -$$
$$- [xz][yy][zh] - [xy][yh][zz] - [yz]^2[xh],$$

$$D_b = \begin{Vmatrix} [xx] & [xh] & [xz] \\ [xy] & [yh] & [yz] \\ [xz] & [zh] & [zz] \end{Vmatrix} =$$

$$= [xx][yh][zz] + [xh][yz][xz] + [xy][zh][xz] -$$
$$- [xz][yh][xz] - [xy][xh][zz] - [yz][zh][xx],$$

$$D_c = \begin{Vmatrix} [xx] & [xy] & [xh] \\ [xy] & [yy] & [yh] \\ [xz] & [yz] & [zh] \end{Vmatrix} =$$

$$= [xx][yy][zh] + [xz][xy][yh] + [xy][yz][xh] -$$
$$- [xh][yy][xz] - [xx][yh][yz] - [xy]^2[zh],$$

С использованием построенных определителей решение системы нормальных уравнений имеет вид

$$a = \frac{D_x}{D};\ b = \frac{D_y}{D};\ c = \frac{D_z}{D}.$$

Теперь необходимо оценить погрешности полученного результата.

Задача решается, как и в случае линейной зависимости двух величин, путем выделения одной, погрешность измерения которой существенно превышает погрешности измерений остальных. Условные уравнения тогда преобразуют так, чтобы величина, измеряемая с наибольшей погрешностью, была выделена в свободный член. Результаты же наблюдений x_i, y_i, z_i тогда считаются точными. В этом случае оценки дисперсии найденных значений неизвестных можно вычислить, пользуясь формулами:

$$\tilde{s}_a^2 = \frac{D_{11}}{D}\frac{S}{(n-m)}$$

$$\tilde{s}_b^2 = \frac{D_{22}}{D}\frac{S}{(n-m)},$$

$$\tilde{s}_c^2 = \frac{D_{33}}{D}\frac{S}{(n-m)},$$

где D_{11}, D_{22}, D_{33} – алгебраические дополнения элементов $[xx]$, $[yy]$ и $[zz]$ определителя D соответственно (они получаются путем удаления из матрицы определителя D столбца и строчки, на пересечении которых находится данный элемент), $S = \sum_{i=1}^{n} n_i^2$ – значение функционала суммы квадратов невязок условных уравнений в точке его минимума (при подстановке в них получены оптимальные значения коэффициентов a, b и c.

На практике не всегда погрешности измерений всех величин много меньше погрешности измерения величины, выделенной в правую часть условных уравнений. Тем не менее и в этих случаях желательно пользоваться формулами для $\tilde{s}_a^2, \tilde{s}_b^2, \tilde{s}_c^2$ и S, дающими простое решение задачи. Вычисление оценки дисперсии условных уравнений по этим формулам можно рассматривать как «приведение погрешностей левых частей условных уравнений к правым».

Метод наименьших квадратов дает возможность найти оценки измеряемых величин и оценить их средние квадратические отклонения.

Доверительные интервалы для истинных значений измеряемых величин строят на основе распределения Стьюдента. Число степеней свободы при этом для всех измеряемых величин равно $n-m$.

В качестве примера применения метода наименьших квадратов для совместной обработки результатов измерений рассмотрим измерение углов треугольника с трехкратным повторением наблюдений.

Пусть результаты равноточных измерений углов привели к следующим значениям:

$$x_1 = 89°55',\ y_1 = 45°5',\ z_1 = 44°57';$$
$$x_2 = 89°59',\ y_2 = 45°6',\ z_2 = 44°55';$$
$$x_3 = 89°57',\ y_3 = 45°5',\ z_3 = 44°58'.$$

Если найти каждый из углов как ***среднее арифметическое*** результатов соответствующих наблюдений, то получим

$$\tilde{x} = 89°57',\ \tilde{y} = 45°5{,}33',\ \tilde{z} = 44°56{,}67'.$$

Известно, что сумма углов треугольника должна удовлетворять условию

$$x + y + z = 180°.$$

Однако в результате измерений сумма углов получилась равной

$$\tilde{x} + \tilde{y} + \tilde{z} = 179°59'.$$

Рассмотрим, можно ли уточнить этот результат за счет совместной обработки полученных данных. Выявленное несовпадение теоретического и измеренного значений суммы углов треугольника – результат погрешностей измерений. Необходимо вввести поправочные коэффициенты a, b и c такие, чтобы точно известное условие было выполнено, то есть

$$a\tilde{x} + b\tilde{y} + c\tilde{z} = 180°.$$

Исходя из данных соображений, формируем систему условных уравнений

$$ax_1 + by_1 + cz_1 - h = n_1,$$
$$ax_2 + by_2 + cz_2 - h = n_2,$$
$$ax_3 + by_3 + cz_3 - h = n_3,$$

где $h = 180°$, n_i - невязки условных уравнений, $i = 1, 2, 3$.

Теперь составим систему нормальных уравнений:

$$a\sum_{i=1}^{3} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{3} x_i y_i + c\sum_{i=1}^{3} x_i z_i = h\sum_{i=1}^{3} x_i,$$
$$a\sum_{i=1}^{3} x_i y_i + b\sum_{i=1}^{3} y_i^2 + c\sum_{i=1}^{3} y_i z_i = h\sum_{i=1}^{3} y_i,$$

$$a\sum_{i=1}^{3} x_i z_i + b\sum_{i=1}^{3} y_i z_i + c\sum_{i=1}^{3} z_i^2 = h\sum_{i=1}^{3} z_i ,$$

Построим определители этой системы и найдем ее решение методом Крамера. Получим следующие значения коэффициентов:

$$a = 1{,}000062,\ b = 1{,}00012,\ c = 1{,}00012.$$

Подставляя значения коэффициентов в соотношение для суммы углов треугольника, получим

$$a\tilde{x} + b\tilde{y} + c\tilde{z} =$$
$$= 1{,}000062 \cdot (89°57') + 1{,}00012 \cdot (45°5{,}33') + 1{,}00012 \cdot (44°56{,}67') = 180°$$

§ 5.4 Приведение линейных неравноточных условных уравнений к равноточным. Линеаризация нелинейных условных уравнений

5.4.1 Совместная обработка неравноточных измерений нескольких величин, связанных линейной зависимостью

В §5.3 рассмотрен случай совместной обработки результатов измерений нескольких физических величин, когда все условные уравнения имеют одну и ту же дисперсию. Такие условные уравнения принято называть ***равноточными***. На практике могут быть случаи, когда условные уравнения имеют ***разные*** дисперсии. Обычно это происходит, если в систему уравнений соединяют уравнения, отражающие результаты измерений, выполненных в разных условиях. Соответственно этому и условные уравнения окажутся ***неравноточными***.

При неравноточных условных уравнениях наиболее вероятную совокупность значений неизвестных $a, b, c, \ldots, k$ получают, если решение системы условных уравнений ищут исходя из условия

$$\sum_{i=1}^{n} g_i n_i^2 \to \min .$$

где g_i – вес i-ого условного уравнения; n_i – невязка i-ого условного уравнения.

Введение весов равносильно умножению условных уравнений на $\sqrt{g_i}$:

$$\sqrt{g_i}(ax_i + by_i + cz_i + \ldots + kw_i - h_i) = \sqrt{g_i} n_i ,\ i = \overline{1,n},\ n \ge m .$$

В итоге в коэффициенты при неизвестных в нормальных уравнениях войдут сомножители g_i:

$$a\sum_{i=1}^{n} g_i x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} g_i x_i y_i + c\sum_{i=1}^{n} g_i x_i z_i + \ldots + k\sum_{i=1}^{n} g_i x_i w_i = \sum_{i=1}^{n} g_i x_i h_i \,,$$

$$a\sum_{i=1}^{n} g_i x_i y_i + b\sum_{i=1}^{n} g_i y_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} g_i y_i z_i + \ldots + k\sum_{i=1}^{n} g_i y_i w_i = \sum_{i=1}^{n} g_i y_i h_i \,,$$

$$a\sum_{i=1}^{n} g_i x_i z_i + b\sum_{i=1}^{n} g_i y_i z_i + c\sum_{i=1}^{n} g_i z_i^2 + \ldots + k\sum_{i=1}^{n} g_i z_i w_i = \sum_{i=1}^{n} g_i z_i h_i \,,$$

…………………………………………………………

$$a\sum_{i=1}^{n} g_i x_i w_i + b\sum_{i=1}^{n} g_i y_i w_{ii} + c\sum_{i=1}^{n} g_i z_i w_i + \ldots + k\sum_{i=1}^{n} g_i w_i^2 = \sum_{i=1}^{n} g_i w_i h_i$$

Для системы нормальных уравнений также используют обозначения Гаусса или так называемые «скобки Гаусса», но измененные для случая неравноточных измерений:

$$\sum_{i=1}^{n} g_i x_i^2 = [gxx], \ \sum_{i=1}^{n} g_i x_i y_i = [gxy], \ \sum_{i=1}^{n} g_i x_i z_i = [gxz],$$

$$\sum_{i=1}^{n} g_i x_i w_i = [gxw], \ \sum_{i=1}^{n} g_i x_i h_i = [gxh].$$

Очевидно, что $\sum_{i=1}^{n} g_i x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} g_i y_i x_i$, то есть $[gxy] = [gyx]$. Аналогично $[gxz] = [gzx]$, $[gxw] = [gwx]$ и так далее.

С использованием таких обозначений система нормальных уравнений при неравноточных измерениях примет вид

$$a[gxx] + b[gxy] + c[gxz] + \ldots + k[gxw] = [gxh],$$

$$a[gxy] + b[gyy] + c[gyz] + \ldots + k[gyw] = [gyh],$$

$$a[gxz] + b[gyz] + c[gzz] + \ldots + k[gzw] = [gzh],$$

…………………………………………..

$$a[gxw] + b[gyw] + c[gzw] + \ldots + k[gww] = [gwh].$$

После таких преобразований получают систему m линейных уравнений с m неизвестными.

Веса условных уравнений находят в соответствии с рассмотренными ранее соображениями из условий:

$$\sum_{i-1}^{n} g_i = 1,$$

$$g_1 : g_2 : \ldots : g_n = 1/s_1^2 : 1/s_2^2 : \ldots : 1/s_n^2$$

Следовательно, для решения задачи нужно знать дисперсии условных уравнений или их приближенные оценки. Если веса определены (или выбраны), то после преобразований дальнейшее решение задачи выполняют в полном соответствии с изложенным ранее. В итоге получают оценки неизвестных величин и их средние квадратические отклонения.

5.4.2 Преобразование нелинейных условных уравнений к линейному виду

Метод наименьших квадратов по ряду причин принципиального характера используется только для ***линейных условных уравнений***. В обширном классе практических задач совместно измеряемые физические величины связаны нелинейными зависимостями. Для того чтобы расширить область применимости метода наименьших квадратов на эту группу задач, целесообразно нелинейные условные уравнения преобразовать к линейному виду.

Известны различные способы линеаризации условных уравнений. Рассмотрим некоторые из них.

Способ замены переменных. Рассмотрим произвольную функциональную зависимость двух величин $y = f(x)$. В широком ряде случаев ее можно представить в виде степенного ряда:

$$y = h + ax + bx^2 + cx^3 + \ldots + kx^m .$$

Проводя замену переменных $y = t$, $x^2 = y$, $x^3 = z, \ldots,$ $x^m = w$, нелинейную функцию преобразуют в линейную для новых переменных

$$t = h + ax + by + cz + \ldots + kw .$$

Если функция имеет вид

$$y = (h + ax + bx^2 + cx^3 + \ldots + kx^m)^{-1},$$

то заменой переменных $y = t^{-1}$, $x^2 = y$, $x^3 = z, \ldots,$ $x^m = w$ нелинейную функцию преобразуют в линейную

$$t = h + ax + by + cz + \ldots + kw .$$

Далее строят систему условных уравнений в новых переменных и решают ее методом наименьших квадратов. После чего проводят обратную замену переменных.

Способ выравнивающих функций. Представленный выше пример является частным случаем линеаризации с помощью ***выравнивающих*** функций. Для зависимости $y = f(x)$ выравнивающими функциями называют функции $F_1 = j(x, y)$ и $F_2 = y(x, y)$, связанные между собой линейной зависимостью. Для целого ряда функций $y = f(x)$ такие выравнивающие функции существуют.

1. Пусть $y = ax^b$. Выравнивающие функции $F_1 = \lg x$, $F_2 = \lg y$. Тогда линейная зависимость

$$F_2 = \lg a + b \lg F_1 .$$

2. Пусть $y = ae^{bx}$. Выравнивающие функции $F_1 = x$, $F_2 = \ln y$. Тогда линейная зависимость

$$F_2 = \ln a + bF_1 .$$

3. Пусть $y = x/(a + bx)$. Выравнивающие функции $F_1 = x^{-1}$, $F_2 = y^{-1}$. Тогда линейная зависимость

$$F_2 = aF_1 + b .$$

Общий способ линеаризации. Общий способ решения данной задачи основан на допущении, что несовместность условных уравнений невелика, то есть их невязки малы. Кроме того, предполагается, что функция m переменных $t = f(a, b, c, ..., k; x, y, z, ..., w)$ непрерывна и дифференцируема. Напомним, что неизвестными здесь являются параметры $a, b, c, ..., k$. Тогда, определив приближенные значения параметров $a_0, b_0, c_0, ..., k_0$, раскладывают функцию $t = f(a, b, c, ..., k; x, y, z, ..., w)$ в ряд Тейлора в окрестности точки с координатами $(a_0, b_0, c_0, ..., k_0)$. Предполагая, что окрестность этой точки, в которой исследуется функция $t = f(a, b, c, ..., k; x, y, z, ..., w)$ невелика, ряд Тейлора ограничивают линейными членами, то есть

$$f(a, b, c, ..., k; x, y, z, ..., w) = f(a_0, b_0, c_0, ..., k_0; x, y, z, ..., w) +$$

$$+ \left.\frac{\partial f}{\partial a}\right|_{a=a_0} d_a + \left.\frac{\partial f}{\partial b}\right|_{b=b_0} d_b + \left.\frac{\partial f}{\partial c}\right|_{c=c_0} d_c + ... + \left.\frac{\partial f}{\partial k}\right|_{k=k_0} d_k ,$$

где $d_a, d_b, d_c, ..., d_k$ – поправки к начальным значениям коэффициентов $a_0, b_0, c_0, ..., k_0$.

Видно, что в результате нелинейные условные уравнения преобразованы к линейному виду относительно неизвестных поправок $d_a, d_b, d_c, ..., d_k$. Решая линеаризованную систему уравнений методом наименьших квадратов, получим значения $d_a, d_b, d_c, ..., d_k$, позволяющие уточнить значения коэффициентов $a, b, c, ..., k$:

$$a = a_0 + d_a,\ b = b_0 + d_b,\ c = c_0 + d_c, \ldots,\ k = k_0 + d_k.$$

При необходимости уточненные с помощью поправок первого порядка значения коэффициентов можно уточнить еще раз, взяв их за исходные, разложив функцию в окрестности новой точки и построив новую систему условных уравнений относительно поправок второго порядка. Для обеспечения высокой точности определения коэффициентов нелинейной функции этот процесс может повторяться несколько раз.

Важным практическим вопросом применения этого способа линеаризации является такой: откуда взять нулевое приближение значений коэффициентов, то есть значения $a_0, b_0, c_0, ..., k_0$, подлежащие дальнейшему уточнению? Может быть предложен следующий вариант ответа на него. Из системы условных уравнений, объединяющей $n \geq m$ уравнений, произвольно выбирают m уравнений и решают такую «усеченную» систему относительно m неизвестных $a, b, c, ..., k$. Полученное приближенное решение и используют в качестве исходного для последующего уточнения.

Контрольные вопросы и задания

1. В чем заключаются основные особенности совместной обработки результатов измерений нескольких величин? Чем совместные (совокупные) измерения отличаются от косвенных?

2. Методом максимального правдоподобия для величин y и x, распределенных по нормальному закону и связанных линейной зависимостью $y = ax + b$, найдите оптимальные оценки значений коэффициентов a, b и их дисперсии s_a^2 и s_b^2.

3. Две величины, y и x, связаны линейной зависимостью $y = ax + b$. С использованием метода наименьших квадратов определите значения неизвестных коэффициентов a, b по следующим совокупностям полученных результатов измерений:

а)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	-4	-1	-2	1	3

б)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	5	4	4	1	1

в)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	-1	-2	3	4

г)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	3	-2	-4	1	4

3. Поясните сущность и перечислите последовательность операций, направленных на решение системы линейных условных уравнений методом наименьших квадратов. Что такое система нормальных уравнений?

4. Как оценивают дисперсии значений неизвестных коэффициентов в линейных зависимостях нескольких величин, установленных в процессе совместной обработки результатов измерений?

5. Как приобразуют систему неравноточных условных уравнений к системе равноточных условных уравнений?

6. Как линеаризовать систему нелинейных условных уравнений способом выравнивающих функций?

7. В чем заключается существо общего способа линеаризации условных уравнений при совместном измерении нескольких величин?

Список литературы к главе 5

1. Большаков В.Д. Теория ошибок наблюдений : учебник для вузов / В.Д. Большаков. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1983. – 223 с.

2. Бурмистров Г.А. Основы способа наименьших квадратов / Г.А. Бурмистров. – М.: Госгеолтехиздат, 1963. – 392 с.

3. Великанов М.И. Ошибки измерений и эмпирические зависимости / М.И. Великанов. – Л.: Гидрометеоиздат, 1962. – 302 с.

4. Гайдышев И.П. Анализ и обработка данных: специальный справочник / И.П. Гайдышев. – СПб.: Питер, 2001. – 752 с.

5. Гаусс К.Ф. Избранные геодезические сочинения, т. 1. Способ наименьших квадратов / К.Ф. Гаусс. – М.: Геодезиздат, 1957. – 157 с.

6. Куштин И.Ф. Геодезия: обработка результатов измерений: учебное пособие / И.Ф. Куштин. – М.: ИКЦ «МарТ», 2006. – 288 с.

7. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений / Ю.В. Линник. – М.: Физматгиз, 1958. – 334 с.

8. Мудров В.И. Методы обработки измерений (квазиправдоподобные оценки) / В.И. Мудров, В.Л. Кушко. – М.: Советское радио, 1983. – 304 с.

9. Рабинович С.Г. Погрешности измерений / С.Г. Рабинович – Л.: Энергия, 1978. – 262 с.

10. Чеботарев А.С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей / А.С. Чеботарев. – М.: Геодезиздат, 1958. – 606 с.

11. Bonamente M. Statistics and Analysis of Scientific Data. – Springer Science+Business Media, 2013. – 301 p.

12. Buonaccorsi J.P. Measurement error: models, methods, and applications. – New York: Chapman & Hall/CRC interdisciplinary statistics series, 2010. – 438 p.

Приложение. Проверка гипотезы о совпадении измеренного среднего и известного значения величины. Распределение Стьюдента

Пусть имеется множество $\{x_i\}_1^n$ результатов многократного измерения нормально распределенной величины x. На основании этих данных построены две оценки:

- значения величины x в виде выборочного среднего арифметического

$$\tilde{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

и дисперсии среднего арифметического

$$\tilde{s}_{\tilde{x}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \tilde{x})^2}{n(n-1)}.$$

Предполагается выяснить (проверить гипотезу), совпадает ли измеренное значение $\tilde{x}$ величины x с известным (заданным заранее, точно известным, например, из теоретических соображений, расчетов или данных проведенных ранее измерений) значением x_0 этой величины, то есть выполняется ли равенство

$$\tilde{x} = x_0.$$

В качестве x_0 может выступать и неизвестное, но объективно существуюшее, истинное значение величины x.

Удобно ввести новую величину, содержащую как результат измерения в виде выборочного среднего арифметического, так и заданное значение

$$t = \frac{\tilde{x} - x_0}{\tilde{s}_{\tilde{x}}},$$

где $\tilde{s}_{\tilde{x}} = \sqrt{\tilde{s}_{\tilde{x}}^2}$ – среднеквадратическое отклонение среднего арифметического.

Если равенство $\tilde{x} = x_0$ выполняется при $n \to \infty$, то распределением величины t при конечном количестве измерений n является ***распределение Стьюдента***. Это распределение было использовано в §2.5 при формировании точечной и интервальной оценок многократно непосредственно измеренной величины. Здесь некоторые свойства этого распределения будут рассмотрены подробнее.

Форма кривой этого распределения показана на рисунке П.1. Эта линия симметрична относительно прямой, проходящей через точку $t=0$ перпендикулярно оси t, и при неограниченном росте числа n приближается к кривой нормального распределения с параметрами $\bar{t}=0$ и $s_t^2=1$. При малых n максимум распределения Стьюдента ниже максимума нормального распределения, а на крыльях, то есть при удалении от центра, график распределения Стьюдента проходит выше.

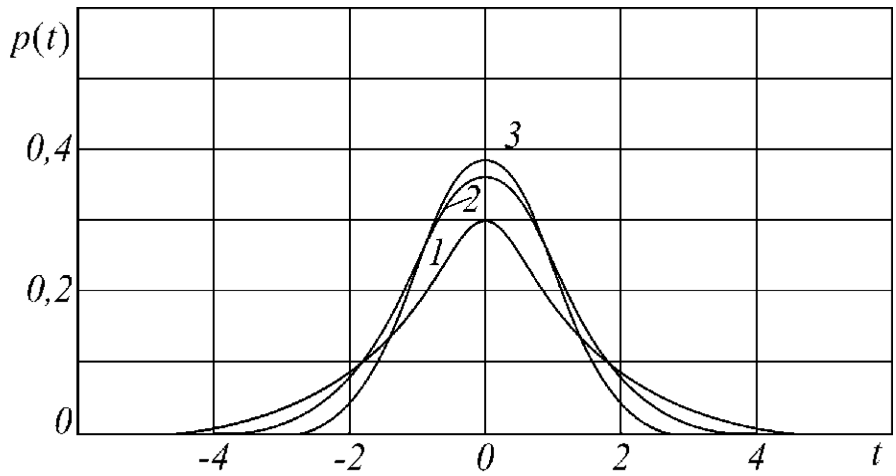


Рис. П.1. Форма кривой распределения Стьюдента для разного числа измерений: 1 – $n=2$; 2 – $n=5$; 3 – $n\to\infty$ (нормальное распределение)

Рассмотрим причины, приводящие к появлению распределения Стьюдента. Мысленно представим эксперимент, в котором проводят многократные измерения величины x, нормально распределенной относительно значения математического ожидания, равного нулю ($m(x)=\tilde{x}=0$), с точно известной дисперсией s^2. Последовательно выполним несколько (m) серий из n измерений, в каждой из которых результаты $(x_1,x_2,...,x_n)_j$, $j=\overline{1,m}$ используем для получения оценок $\tilde{x}_j$ и $\tilde{s}^2_{\bar{x}_j}$, где символ j обозначает порядковый номер серии многократного измерения. Значения $\tilde{x}_j$ и $\tilde{s}^2_{\bar{x}_j}$ являются экспериментальными оценками среднего и дисперсии среднего арифметичекого, поэтому они, как и сама величина x, являются случайными. Это приводит к различным наборам данных, реализуемым в каждой серии результатов многократного измерения. Среднее $\tilde{x}_j$ находят согласно выражению $\tilde{x}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$, где x_{ij} – i-й результат измерения в j-ой серии. Оценка $\tilde{x}_j$ представляет собой сумму нормально распределенных величин. Значит, распределение величин $\tilde{x}_j$ также окажется нормальным с дисперсией $s_{\tilde{x}}^2 < s^2$. Если распределения x и $\tilde{x}$ построить на одном графике, то $p(\tilde{x}, n)$ окажется выше и несколько уже распределения $p(x)$. Это показано на рисунке П.2.

Процедура получения распределений сводится к построению соответствующих гистограмм, как это описано в главе 1. Распределение $p(x)$ строят из полного набора результатов, а $p(\tilde{x}, n)$ – только из набора $\tilde{x}_j$, причем в обоих случаях $j \to \infty$. В пределе среднее значение распределения $p(\tilde{x}, n)$ стремится к нулю, а его дисперсия – к s^2/n.

Преобразуем полученные распределения и приведем их к одному масштабу. Для этого введем новые переменные:

$$t' = x_{ij}/s, \quad t = \tilde{x}_j / s_{\tilde{x}_j},$$

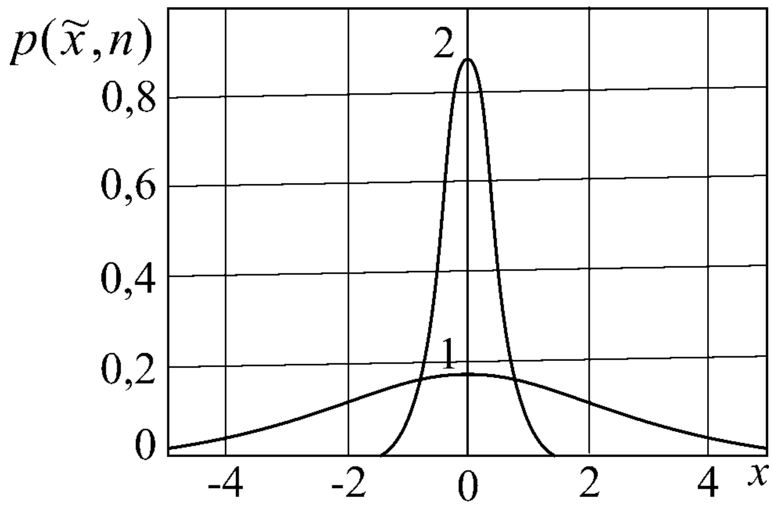


Рис. П.2. Форма кривых распределений $p(x)$ (кривая 1) и $p(\tilde{x}, n)$ (кривая 2)

Распределение $p(t')$ – нормальное распределение с нулевым средним и единичной дисперсией, а $p(t, n)$ – распределение

Стьюдента, которое формируется в результате наложения статистики оценки $s_{\bar{x}_j}$ на гауссову статистику величины $\tilde{x}_j$. Именно эти распределения (для различных n) приведены на рисунке П.1.

Если теперь сравнить величину $t = (\tilde{x} - x_0)/\tilde{s}_{\tilde{x}}$, введенную ранее, и величину $t = \tilde{x}_j / s_{\tilde{x}_j}$, использованную в проведенном рассмотрении, то можно заметить, что в числителе первого отношения вместо $\tilde{x}$ использована разность $\tilde{x} - x_0$ ($\tilde{x} = x_0$ при $n \to \infty$). Однако статистические свойства величины $\tilde{x}_j$ не зависят от линейного сдвига координаты по оси x, а значит, величина $t = (\tilde{x} - x_0)/\tilde{s}_{\tilde{x}}$ также распределена по Стьюденту.

Плотность вероятности распределения Стьюдента описывает выражение

$$p(t,n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{p\,(n-1)} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)},$$

где $\Gamma(m) = \int\limits_0^\infty e^{-y} y^{m-1} dy$ – гамма-функция; n – количество проведенных измерений, $m > 0$.

Зная $p(t,n)$, не составит труда вычислить интервал $[-t(a,n), t(a,n)]$, в который величина t попадет с заданной вероятностью a. Для этого необходимо решить уравнение

$$\int\limits_{-t(a,n)}^{t(a,n)} p(t,n)dt = a \;.$$

Вероятность a определяет так называемый ***уровень значимости***.

Если значение $t = (\tilde{x} - x_0)/s_{\bar{x}}$ попадает в указанный интервал, то это свидетельствует в пользу справедливости гипотезы о совпадении $\tilde{x}$ и x_0 при уровне значимости a. Чем больше a, тем шире интервал, тем больше вероятность обнаружить в нем величину t, относящуюся к эксперименту при $\tilde{x} = x_0$. Найдем интервал возможного изменения величины $\bar{\mathrm{x}}$. Воспользуемся

$$-t(a,n) \le \frac{\tilde{x} - x_0}{s_{\bar{x}}} \le t(a,n).$$

Откуда

$$\tilde{x} - t(a,n)s_{\bar{x}} \le x_0 \le \tilde{x} + t(a,n)s_{\bar{x}}.$$

При попадании заданного значения x_0 в найденный интервал гипотезу о совпадении $\tilde{x}$ и x_0 нужно расценивать как справедливую для уровня значимости a.

Обратим внимание на то, что полученное соотношение очень близко к интервальной оценке измеренного значения величины x, полученной в §2.5. Если же предположить, что уровень значимости является ни чем иным, как ***доверительной вероятностью*** ($a = P$), а рассчитанный интервал возможного изменения x_0 – доверительным интервалом, то все различия этих выражений исчезнут. Тогда $t(a,n)$ – коэффициент Стьюдента. В этих терминах картина проведенного сравнения $\tilde{x}$ и x_0 выглядит следующим образом. Если при сравнении $\tilde{x}$ и x_0 значение x_0 попадает в доверительный интервал, то статистическим выводом является заключение о совпадении сравниваемых величин с доверительной вероятностью $a = P$. Как уже отмечалось, в измерениях часто используют вероятность $a = 0{,}68$, в пределе при больших n задающую интервал $\pm s_{\bar{x}}$ вокруг $\tilde{x}$. Для повышения достоверности используют более высокие уровни значимости (доверительные вероятности), например, $a = 0{,}997$, определяющий более широкий интервал, в пределе стремящийся к $\pm 3s_{\bar{x}}$.

Для малых n за погрешность прямого многократного измерения величины x естественно принимать $\Delta x = t(a,n)s_{\tilde{x}}$, как и предлагалось при обсуждении погрешностей прямых измерений. Именно в интервале, задаваемом Δx, могут оказаться точные величины x_0, совпадающие с результатом измерения $\tilde{x}$. В случае косвенного измерения результаты прямых измерений определяют погрешность результата. При этом необходимо выбрать равный уровень значимости для результатов всех прямых измерений, который переносится на уровень значимости результата косвенного измерения.

Список литературы

1. Анненков Н.С. Методика определения кренов высотных сооружений в стесненных условиях промплощадок энергетических объектов / Н.С. Анненков, А.А. Черемисинов // Мелиорация, водоснабжение и геодезия : материалы межвузовской научно-практической конференции, посвященной столетию ВГАУ и кафедры мелиорации, водоснабжения и геодезии / под редакцией А.Ю. Черемисинова. – Воронеж : ВГАУ, 2013. – С. 84-90.

2. Анненков Н.С. К вопросу об определении непрямолинейности рельсовых осей подкрановых путей / Н.С. Анненков, А.А. Черемисинов // Мелиорация, водоснабжение и геодезия : материалы межвузовской научно-практической конференции / под редакцией профессора А.Ю. Черемисинова. – Воронеж : ВГАУ, 2014. – С. 98-100.

3. Базилевская Е.С. Преимущества и недостатки измерения площадей земельных угодий электронным планиметром / Е.С. Базилевская, М.В. Ванеева // Молодежный вектор развития аграрной науки : материалы 63-й научной студенческой конференции. – Воронеж : ВГАУ, 2012. – С. 269-271.

4. Ванеева М.В. Общие вопросы исследования деформаций зданий и сооружений геодезическими методами / М.В. Ванеева // Инновационные технологии и технические средства для АПК : материалы Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых и специалистов, посвященные 100-летию Воронежского государственного аграрного университета имени императора Петра I. – Воронеж : ВГАУ, 2011. – С. 96-105.

5. Ванеева М.В. О некоторых особенностях использования современных приборов для наблюдения за осадками, деформациями зданий и сооружений / М.В. Ванеева // Инновационные технологии и технические средства для АПК : материалы Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых и специалистов, посвященные 100-летию Воронежского государственного аграрного университета имени императора Петра I. – Воронеж : ВГАУ, 2011. – С. 108-111.

6. Ванеева М.В. Возможности геодезических методов мониторинга агрорельефа / М.В. Ванеева // Развитие аграрного сектора экономики в условиях глобализации : материалы международной

научно-практической конференции / под общей редакцией В.И. Котарева, Н.И. Бухтоярова, А.В. Дедова. – Воронеж : ВГАУ, 2013. – С. 162-168.

7. Ващенко Ю.Е. Способ определения геометрического центра участка территории и/или населенного пункта / Ю.Е. Ващенко, А.В. Попело, В.Д. Попело, П.С. Русинов // патент на изобретение RUS 2256152 12.09.2003

8. Карпов И.Г. Вероятностные модели для последовательности независимых испытаний с тремя исходами / И.Г. Карпов, В.Д. Попело, Д.К. Проскурин // Радиотехника. – 2013. – № 7. – С. 67-69.

9. Козирацкий Ю.Л. Построение физических моделей каналов распространения лазерного излучения для экспериментальных исследований конфликтного взаимодействия оптико-электронных средств / Ю.Л. Козирацкий, В.Д. Попело // Радиотехника. – 1999. – № 8. – С. 80.

10. Кононенко А.С. Система автоматизированного проектирования (САПР) AUTOCAD / А.С. Кононенко, А.А. Черемисинов // Молодежный вектор развития аграрной науки : материалы 63-й научной студенческой конференции. – Воронеж : ВГАУ, 2012. – С. 272-275.

11. Макаренко С.А. Моделирование рельефа с применением 3d картографирования / С.А. Макаренко, М.В. Ванеева // Перспективы развития науки и образования: сборник научных трудов по материалам международной научно-практической конференции. – Тамбов, 2014. – С. 104-107.

12. Макаренко С.А. Моделирование рельефа с применением 3d картографирования / С.А. Макаренко, М.В. Ванеева // Перспективы развития науки и образования: сборник научных трудов по материалам международной научно-практической конференции. – Тамбов, 2014. – С. 104-106.

13. Мысив В.В. Принципы формирования обобщенных показателей свойств (качеств) объектов / В.В. Мысив, А.В. Попело, В.Д. Попело, Д.К Проскурин // Информатика: проблемы, методология, технологии : материалы XIII Международной научно-методической конференции, 2013. – С. 398-402.

14. Нагалин А.В. Особенности использования масштабных моделей объектов сложной формы в экспериментальных иссле-

дованиях оптико-локационных каналов методом физического моделирования / А.В. Нагалин, В.Д. Попело, Д.К. Проскурин // Радиотехника. – 2011. – № 8. – С. 50-53.

15. Печенкин Н.С. Численное представление объектов сложной формы в задачах моделирования процесса лазерной локации / Н.С. Печенкин, Д.К. Проскурин, В.Д. Попело, А.В. Земцов // Радиотехника. – 2010. – № 8. – С. 100-103.

16. Попело А.В. Обоснование методов мониторинга земель историко-культурного назначения (на примере территории верхнего и среднего Дона): дис. … канд. географ. наук / А.В. Попело. – Воронеж, 2006.

17. Попело А. В. Методический подход к формализации данных о свойствах (качестве) природных, природно-антропогенных, социальных систем объектов техносферы / А.В. Попело, В.Д. Попело, А.Ю. Черемисинов // Мелиорация, водоснабжение и геодезия : материалы межвузовской научно-практической конференции, посвященной столетию ВГАУ и кафедры мелиорации, водоснабжения и геодезии / под редакцией А.Ю. Черемисинова. – Воронеж : ВГАУ, 2013. – С. 80-84.

18. Попело В.Д. Систематические погрешности измерений характеристик отражения малоразмерных объектов с когерентным характером отражения / В.Д. Попело, И.Р. Фахуртдинов // Измерительная техника. – 2010. – № 9. – С. 21-24.

19. Попело В.Д. Модель оптико-электронного средства как объекта оптической локации / В.Д. Попело // Радиотехника. – 2005. – № 7. – С. 102.

20. Попело В.Д. Модель процесса лазерной локации произвольного малоразмерного отражателя в случайно-неоднородной среде / В.Д. Попело, Ю.А Мордвинова // Радиотехника. – 1997. – № 6. – С. 62.

21. Попело В.Д. Метод сравнения эффективной площади рассеяния зеркальных отражателей в параллельном пучке зондирующего излучения / В.Д. Попело, И.Р. Фахуртдинов // Измерительная техника. – 2010. – № 5. – С. 39-42.

22. Попело В.Д. Инфологическая модель объектов и процессов измерения характеристик заметности в ходе проведения лазерно-локационного эксперимента / В.Д. Попело, И.Р. Фахуртдинов // Метрология. – 2011. – № 1. – С. 18-25.

23. Попело В.Д. Метод сравнения эффективной площади рассеяния малоразмерных объектов с когерентным характером отражения в сходящемся пучке лазерного излучения / В.Д. Попело, И.Р. Фахуртдинов // Метрология. – 2011. – № 5. – С. 29-40.

24. Попело В.Д. Калибровка рабочих мер для натурных измерений эффективной площади рассеяния объектов в оптическом диапазоне длин волн / В.Д. Попело, И.Р. Фахуртдинов // Метрология. – 2012. – № 1. – С. 22-34.

25. Попело В.Д. Оптико-локационные характеристики объектов различной размерности / Попело В.Д., И.Р. Фахуртдинов // Метрология. – 2012. – № 7. – С. 9-18.

26. Попело В.Д. Сравнительный анализ оптимального и нейросетевых алгоритмов определения границ раздела случайных полей при обработке изображений / В.Д. Попело, А.А. Сирота, О.В. Маслов // Радиотехника. – 2001. – № 10. – С. 81.

27. Попело В.Д. Теория математической обработки геодезических измерений. Часть 1. Математические и метрологические основы обработки геодезических измерений. Оценивание результатов изменений с позиций детерминированного подхода : учебное пособие / В.Д. Попело, М.В. Ванеева. – Воронеж : ВГАУ, 2012. – 138 с.

28. Попело В.Д. Обнаружение и распознавание объектов различных классов с помощью алгоритма функционирования средств дешифрирования изображений природных и антропогенных ландшафтов / В.Д. Попело, М.В. Ванеева // Мелиорация, водоснабжение и геодезия : материалы межвузовской научно-практической конференции, посвященной столетию ВГАУ и кафедры мелиорации, водоснабжения и геодезии / под редакцией А.Ю. Черемисинова. – Воронеж : ВГАУ, 2013. – С. 101-109.

29. Попело В.Д. Применение алгоритма геометрической коррекции изображений для автоматизированной системы цифровой обработки данных дистанционного зондирования / В.Д. Попело, М.В. Ванеева // Мелиорация, водоснабжение и геодезия : материалы межвузовской научно-практической конференции, посвященной столетию ВГАУ и кафедры мелиорации, водоснабжения и геодезии / под редакцией А.Ю. Черемисинова. – Воронеж : ВГАУ, 2013. – С. 109-117.

30. Попело В.Д. Обоснование класса точности оптимальных алгоритмов построения оценок результатов геодезических измерений, имеющих неодинаковые точность и значимость / В.Д. Попело, М.В. Ванеева // Мелиорация, водоснабжение и геодезия : материалы межвузовской научно-практической конференции / под редакцией профессора А.Ю. Черемисинова. – Воронеж : ВГАУ. 2014. – С. 94-98.

31. Попело В.Д. Уравнивание расчетов элементов взаимного ориентирования пар аэроизображений территорий с неплоским рельефом / В.Д. Попело, М.В. Ванеева // Мелиорация, водоснабжение и геодезия : материалы межвузовской научно-практической конференции / под редакцией профессора А.Ю. Черемисинова. – Воронеж : ВГАУ. 2014. – С. 101-104.

32. Попело В.Д. Физико-математическая модель объектов и процессов измерения характеристик заметности в ходе проведения лазерно-локационного эксперимента / В.Д. Попело, И.Р. Фахуртдинов // Метрология. – 2011. – № 2. – С. 13-25.

33. Попело В.Д. Оптико-локационные характеристики линейных объектов / В.Д. Попело, Д.К. Проскурин // Радиотехника. – 2012. – № 5. – С. 110-114.

34. Вариации коэффициента габаритной яркости образца легкобронированной техники в суточном цикле изменения естественной освещенности / В.Д. Попело // Радиотехника. – 2013. – № 7. – С. 57-61.

35. Попело В.Д. Методика оценки мощности зондирующего сигнала в плоскости приема датчика лазерного облучения объекта / В.Д. Попело, Д.К. Проскурин, С.В. Утемов // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2014. – Т. 19, № 3. – С. 57-61.

36. Попело В.Д. Моделирование протяженных трасс при калибровке рабочих мер эффективной площади рассеяния в оптическом диапазоне длин волн / В.Д. Попело, Д.К. Проскурин, И.Р. Фахуртдинов // Измерительная техника. – 2013. – № 9. – С. 51-53.

37. Проскурин Д.К. Моделирование распространения, порожденного объектом сложной формы поля, в среде с локализованными неоднородностями / Д.К. Проскурин, В.Д Попело, Н.С. Печенкин, А.В. Земцов // Радиотехника. – 2010. – № 8. – С. 104-108.

38. Севостьянова Н.В. Ретроспективный анализ преобразования геодезических приборов / Н.В. Севостьянова, М.В. Ванеева // Молодежный вектор развития аграрной науки : материалы 64-й научной студенческой конференции. – Воронеж : ВГАУ, 2013. – С. 176-180.

39. Сирота А.А. Совместное оценивание границ и случайных полей изображений при построчных наблюдениях / А.А. Сирота, В.Д. Попело // Радиотехника. – 2000. – № 8. – С. 65.

40. Сирота А.А., Нейросетевые и оптимальные алгоритмы обнаружения локально-неоднородных участков изображений / А.А. Сирота, В.Д. Попело, О.В. Маслов // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. – 2003. – Т. 46, № 9. – С. 66-74.

41. Словарь терминов и определений / А.Ю. Черемисинов. – Воронеж : ВГАУ, 2014. – 212 с.

42. Ступин В.И. Дефекты эксплуатации плотин / В.И. Ступин, И.П. Землянухин, С.П. Бурлакин, А.А. Черемисинов // Мелиорация, водоснабжение и геодезия : материалы межвузовской научно-практической конференции / под редакцией профессора А.Ю. Черемисинова. – Воронеж : ВГАУ, 2014. – С. 60-66.

43. Черемисинов А.А. Формирование системы управления сельскохозяйственным землепользованием в современных условиях (на материалах ЦЧР) : дис. … канд. экон. наук / А.А. Черемисинов. – Воронеж, 2002.

44. Черемисинов А.А. Особенности управления водохозяйственной системой в Воронежской области / А.А. Черемисинов // Инновационные технологии и технические средства для АПК : материалы всероссийской научно-практической конференции молодых ученых и специалистов, посвященной 100-летию Воронежского государственного аграрного университета имени императора Петра I. – Воронеж : ВГАУ, 2011. – С. 90-95.

45. Черемисинов А.Ю. Конспект лекций по курсу «Автоматизация геодезических работ» / А.Ю. Черемисинов, М.В. Ванеева. – Воронеж : ВГАУ, 2012. – 56 с.

46. Черемисинов А.Ю. Конспект лекций по курсу «Опорные геодезические сети» / А.Ю. Черемисинов, М.В. Ванеева. – Воронеж : ВГАУ, 2012. – 47 с.

47. Черемисинов А.Ю. Метеорология и климатология : учебное пособие / А.Ю. Черемисинов, В.Д. Попело, И.П. Землянухин. – Воронеж : ВГАУ, 2010. – 233 с.

48. Черемисинов А.Ю. Опыт агроресурсопользования в ЦЧР / А.Ю. Черемисинов, А.А. Черемисинов // Вестник учебно-методического объединения по образованию в области природообустройства и водопользования. – 2010. – № 2. – С. 236-241.

49. Черемисинов А.Ю. История инженерных искусств : учебное пособие. Часть 1 / А.Ю. Черемисинов, С.А. Макаренко, А.А. Черемисинов. – Воронеж : ВГАУ, 2015. – 166 с.

50. Popelo V.D. A method of comparing the effective scattering area of small objects with a coherent form of reflection in a converging beam of laser radiation / V.D. Popelo, I.R. Fakhurtdinov // Measurement Techniques. – 2011. – V. 54, № 6. – P. 674-680.

51. Popelo V.D. Optophysical measurements calibration of working measures for natural measure-ments of the effective scattering area of objects in the optical wavelength range / V.D. Popelo, I.R. Fakhurtdinov //Measurement Techniques. – 2012. – V. 55, № 3. – P. 257-264.

52. Popelo V.D. Optical detection and ranging characteristics of objects of different dimen-sions / V.D. Popelo, I.R. Fakhurtdinov // Measurement Techniques. – 2012. – V. 55, № 9. – P. 1012-1017.

Учебное издание

В.Д. Попело
М.В. Ванеева

Теория математической обработки геодезических измерений

Часть 2
Оценивание результатов геодезических измерений и их погрешностей на основе вероятностных представлений

Учебное пособие

Редактор О.В. Ситникова
Компьютерная верстка И.А. Остапенко

Подписано в печать 28.12.2015. Формат $60\times84^{1}/_{16}$
Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Бумага офсетная. П. л. 8,6. Тираж 80 экз. Заказ № 13577

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I»
Типография ФГБОУ ВО Воронежский ГАУ
394087, г. Воронеж, ул. Мичурина, 1
Информационная поддержка: **http://tipograf.vsau.ru**